TD01- COUPLES DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES ET INDEPENDANCE

1. Exercice 1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
1	1/12	0	1/12
2	2/12	1/12	1/12
3	3/12	2/12	1/12

1. Vérifier que l'on dispose bien d'une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Calculer E[X] et E[Y].
4. Calculer V[X] et V[Y].
5. Calculer Cov(X, Y).
6. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que X = 1.

2. Exercice 2

Soient deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	0,22	0,20	0,00	0,02
1	0,05	0,11	0,04	0,01
2	0,04	0,07	0,02	0,22

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
2. Calculer E[X] et E[Y].
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que Y = 2.
4. Calculer E[X|Y = 2] et V[X|Y = 2].
5. Calculer Cov(X, Y), puis le coefficient de corrélation.
6. Les deux variables sont-elles indépendantes ?
7. Déterminer la loi de distribution de la variable aléatoire W = Y 2 – X

3. Exercice 3.

La loi jointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-contre :

X \ Y	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer E(X), E(Y) et E(XY).
4. Ce dernier résultat confirme-t-il votre réponse à la question 2 ? Justifier.

4. Exercice 4

Trouver une variable aléatoire indépendante d'elle-même.

5. Exercice 5

On considère l'épreuve consistant à jeter 2 fois un dé normal. On désigne par X le premier numéro obtenu, par Y le deuxième numéro obtenu et par Z l'indicatrice de l'événement : « La somme des deux numéros obtenus est impaire ». (Par définition, l'indicatrice d'un événement prend la valeur 1 dans cet événement et la valeur 0 ailleurs.).

Etudier l'indépendance de X et de Z, de Y et de Z, de X + Y et de Z.

6. Exercice 6

X et Y sont 2 variables aléatoires discrètes définies sur un même univers. Leur loi de probabilité conjointe est définie par le tableau ci-contre :

X Y	0	1	2	3
0	1/30	2/30	1/30	1/30
1	3/30	1/30	0	2/30
2	1/30	4/30	1/30	2/30
3	2/30	1/30	1/30	0

1. Calculer la covariance de X et de Y, le coefficient de corrélation linéaire de X et de Y, et une équation de la droite de régression de Y en X. Détailler les calculs.

4	1/30	1/30	3/30	2/30

2. Calculer l'espérance mathématique conditionnelle de Y et la variance conditionnelle de Y sous chacune des conditions X = 0, X = 1, X = 2, X = 3.

3. Relativement à un même repère (unité : 5 cm), tracer la droite de régression de Y en X, le point moyen du nuage et le nuage de régression de Y en X.

7. Exercice 7

On jette 2 fois un dé cubique ordinaire, bien équilibré. On pose la division du premier numéro obtenu par le deuxième numéro obtenu. Si la division ne tombe pas juste, on s'arrête à la virgule.

Par exemple, quand on divise 5 par 2, le quotient est 2 et le reste est 1.

Autre exemple : quand on divise 6 par 2, le quotient est 3 et le reste 0.

On désigne par X le quotient et par Y le reste.

1. Donner (sous forme de tableau) la loi de probabilité conjointe de (X, Y), la loi de probabilité marginale de X et la loi de probabilité marginale de Y.

2. Donner l'espérance mathématique de X et celle de Y.

3. Déterminer la matrice des variances-covariances de (X, Y).

4. Donner, sous forme de tableau, la loi de probabilité de l'espérance conditionnelle de Y et celle de la variance conditionnelle de Y.

5. Tracer dans un même graphique le point moyen du nuage, le nuage de régression de Y en X et la droite de régression de Y en X.

8. Exercice 8

X et Y sont 2 variables aléatoires discrètes définies sur un même univers. Leur loi de probabilité conjointe est définie par le tableau suivant :

1. Compléter ce tableau.

2. Calculer les probabilités $P(X \leq 2 \text{ et } Y \geq 3)$ et $P(X > Y)$.

3. Calculer chacun des réels E(X), E(Y), V(X), V(Y), Cov(X, Y), r(X, Y).

4. Donner une équation de la droite de régression de Y en X.

Y / X	1	2	3	4	Total
1	0,06	0,02	0,04	0,08	
2	0,1	0,06	0,02	0,04	
3	0,04	0,08		0,02	
4	0,02	0,04	0,08	0,02	
5	0,08	0,06	0,02	0,02	
Total					

5. Compléter le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5
P(X = x)					
E(Y/X = x)					
$E(Y^2 / X = x)$					
V(Y/X = x)					

6. Calculer chacun des réels E(V(Y / X)), V(E(Y / X)) et E(V(Y / X)) + V(E(Y / X))

9. Exercice 9

Une urne contient quatre boules marquées 1, trois boules marquées 2, deux boules marquées 3 et une boule marquée 4. On choisit au hasard deux boules dans cette urne. On désigne par X la différence (en valeur absolue) des deux numéros obtenus et par Y la somme des deux numéros obtenus.

1. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) et les deux lois de probabilités marginales de X et de Y.

2. Calculer E(X), E(Y), V(X), V(Y), Cov(X, Y), r(X, Y).

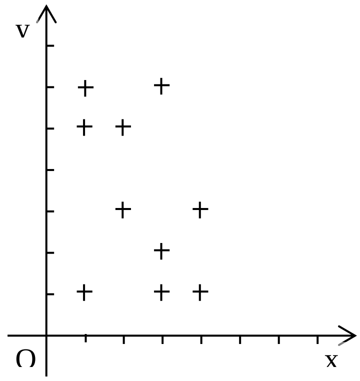
3. Donner une équation de la droite D de régression de Y en X.

4. Calculer E(Y/X = x) pour chaque valeur x possible pour X.

5. Dessiner sur une même figure le nuage de régression de Y en X et la droite D.

10. Exercice 10

Voici un nuage de dix points équi-pondérés (ils ont tous le même poids). L'unité est le centimètre. Les coordonnées sont entières.
Tracer le point moyen du nuage, le nuage de régression de Y en X et la droite de régression de Y en X. On donnera tous les calculs utiles.

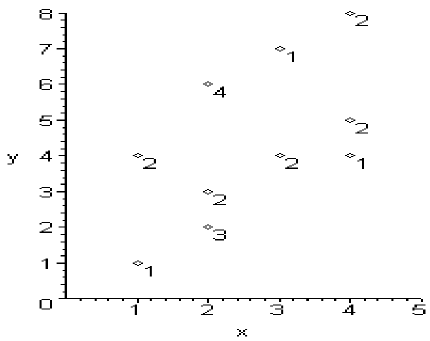


11. Exercice 11

La figure tracée ci-contre représente le nuage de points relatif à un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes. Les nombres écrits près des points sont les poids des points. Ils sont proportionnels aux probabilités.

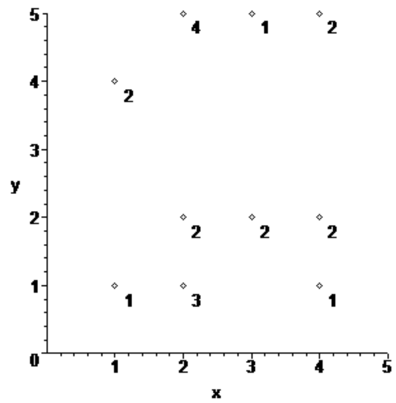
1. Tracer la droite de régression de Y en X. On détaillera les calculs.

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et de Y.



12. Exercice 12

Le nuage de points ci-dessous représente un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes.
Les nombres figurant près des points sont les « poids » des points. Ils sont proportionnels aux probabilités.



1. Déterminer et tracer (sur la figure ci-dessus) le point moyen du nuage.

2. Déterminer et tracer les points du nuage de régression de Y en X.

3. Déterminer et tracer la droite de régression de Y en X.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Trouver les réels V(E(Y/X)), E(V(Y/X)) et V(Y).

13. Exercice 13

Hypothèses : Var(X) = 2 ; Var(Y) = 5 ; Cov(X, Y) = -3.

Calculer : Cov(4X – Y + 2, 3X + 2Y – 6) ; Var(-3X + 4Y – 3).

14. Exercice 14

Hypothèses : Var(3X + Y + 10) = 35 ; Var(2X + 5Y – 7) = 82 ; Cov(X – 3Y + 4, 4X + Y – 3) = -5.

Calculer : Var(X + 2Y – 8) ; Cov(2X + 3Y + 5, -3X + 2Y + 1).

TD02- VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES : COUPLES, VECTEURS ET INDEPENDANCE

1. Exercice 15

Déterminer les densités de probabilité conjointe et marginales dans le cas où la distribution de (X, Y) est uniforme sur le pavé [-2 ; 1] × [3 ; 8]. X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Exercice 16

A(-2, 0), B(2, 0), C(2, 3) sont trois points. (X, Y) est un couple de variables aléatoires uniforme sur le triangle ABC. f_X, f_Y, $f_{X,Y}$ désignent les densités de probabilités respectives de X, Y, (X, Y). F_X désigne la fonction de répartition de X.

1. Donner une équation de la droite (AC).

2. En supposant le repère orthonormé, donner l'aire (en unité d'aire) du triangle ABC. Déduire $f_{X,Y}(x, y)$.

3. Exprimer $f_X(x)$, $f_Y(y)$ et $F_X(x)$. Représenter f_X et F_X sur un même graphique.

4. Déterminer l'espérance mathématique de X et celle de Y.

5. Déterminer la variance de X et celle de Y.

6. Pour x compris entre -2 et 2, déterminer la densité de probabilité conditionnelle de Y sachant que X = x, puis l'espérance mathématique conditionnelle de Y sachant que X = x.

Sur un même graphique, tracer le triangle ABC et la courbe de régression de Y en X.

7. Calculer la covariance de (X, Y). Donner une équation de la droite de régression de Y en X.

3. Exercice 17

Soient

- A = [0,6] ; B = [-3,0] ; C = [3,0] ;
- (X,Y) est un couple de variables aléatoires uniforme sur le triangle ABC.
- $f_{X,Y}$ est la densité de probabilité conjointe du couple (X, Y). f_X et f_Y sont les densités de probabilités marginales respectives de X et de Y.

1. Donner une équation de chacune des droites (AB) et (AC).

2. Déterminer l'aire (en unité d'aire) du triangle ABC.

3. Définir chacune des densités de probabilités $f_{X,Y}$, f_X et f_Y.

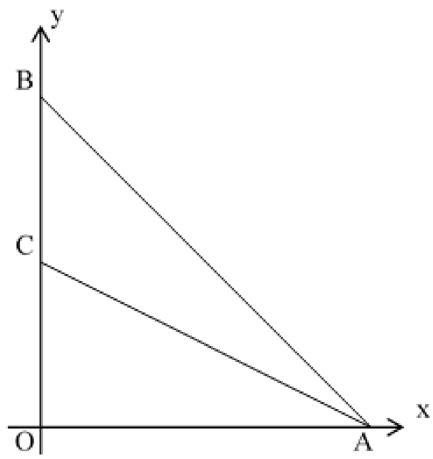
4. Donner les espérances mathématiques de X et de Y.

5. Tracer sans calcul la courbe de régression de Y en X (donner une justification géométrique).

6. Donner la matrice des variances-covariances du couple (X, Y).

7. Tracer la droite de régression de Y en X sur la figure tracée en question 5.

4. Exercice 18



L'unité est de 5 cm sur chaque axe. (X, Y) est un couple de variables aléatoires uniforme sur le triangle OAB.

1. Donner une équation de chacune des droites (AB) et (AC).

2. a) Expliquer pourquoi le segment [A, C] est la courbe de régression de Y en X.

b) Déduire le rapport $\dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$.

3. Déterminer la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y).

4. Déterminer la densité de probabilité marginale de X ;

calculer E(X), V(X) et Cov(X, Y).

5. a) Expliquer pourquoi X et Y sont identiquement distribuées.

b) Déterminer le point moyen et le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y).

5. Exercice 19

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. La variable d'abscisse est notée x. La variable d'ordonnée est notée y.

A(1, 3), B(-3, 1), C(2, -1) sont trois points du plan. (X, Y) est un couple de variables aléatoires dont la densité de probabilité conjointe est constante à l'intérieur du triangle ABC et nulle à l'extérieur.

f_X est la densité de probabilité marginale de X. f_Y est celle de Y. F_X est la fonction de répartition marginale de X.

$f_{X,\,Y}$ est la densité de probabilité conjointe de (X, Y).

1. a) Dessiner le triangle ABC (unité : 2 cm).

b) Calculer l'aire (en unité d'aire, pas en cm^2) du triangle ABC.

c) Donner une équation de chacune des droites (AB), (BC), (CA).

2.a) Déterminer $f_{X,\,Y}(x, y)$ selon la valeur de (x, y).

b) Déterminer $f_X(x)$ selon la valeur de x.

c) Déterminer $F_X(x)$ selon la valeur de x.

d) Tracer (pas sur le graphique dessiné à la question 1 mais sur un nouveau graphique) les courbes représentatives de f_X et F_X (unités : 2 cm en abscisse , 10 cm en ordonnée).

e) Déterminer $f_Y(y)$ selon la valeur de y.

f) Calculer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X et Y. Dessiner dans le triangle ABC le point G(0, 1). Que représente ce point pour le triangle ABC ? Proposer un autre calcul, bien plus simple, de E(X) et de E(Y).

3. On suppose dans cette question : $-3< x <2$.

a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle $f_{Y/X\,=\,x}$ de Y sachant que X = x.

b) Déterminer l'espérance mathématique conditionnelle E (Y/X = x) de Y sachant que X = x.

Tracer la courbe de régression de Y en X sur le même graphique que le triangle ABC. Vérifier l'égalité : E [E(Y / X)] = E(Y).

c) Déterminer la variance conditionnelle V (Y/X = x) de Y sachant que X = x.

4. a) Calculer V(Y). **b)** Vérifier l'égalité : V [E (Y / X)] + E [V (Y / X)] = V(Y).

5. a) Calculer V(X). **b)** Calculer Cov (X, Y).

c) Donner une équation de la droite D de régression de Y en X et tracer D sur la même figure que le triangle ABC.

d) Calculer le coefficient r(X, Y) de corrélation linéaire de X et de Y.

6. Exercice 20

Soient

- A(1, 2), B(– 3, – 1) et C(5, – 4) sont 3 points du plan.
- (X, Y) est un couple de variables aléatoires uniforme sur le triangle ABC.

1. Dessiner le triangle ABC. Calculer les coordonnées du milieu I de [B, C].

2. A l'aide de deux calculs très simples, trouver E(X) et E(Y). Tracer le point moyen G.

3. Sans aucun calcul, construire la courbe de régression de Y en X.

4. La courbe de régression de Y en X est constituée de deux segments de droites [BP] et [PC].

Trouver une équation de chacune des droites (BP) et (PC).

5. Trouver l'aire (exprimée en unité d'aire) du triangle ABC. (**Réponse** à justifier : 18)

6. Trouver une équation de chacune des droites (AB), (BC) et (CA).

7. **a)** Déterminer la densité de probabilité conjointe du couple (X, Y).

b) Déterminer la densité de probabilité marginale de X. **Réponse** partielle à justifier :

$-3 \le x < 1$	$1 \le x < 5$
$f_X(x) = (x + 3) / 16$	$f_X(x) = (-x + 5) / 16$

8. Déterminer et tracer la droite de régression de Y en X. On détaillera les calculs.

Indication. On pourra utiliser sans justification les égalités suivantes : $\frac{1}{16}\int_{-3}^{1} x^2(x+3)dx = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}\int_{1}^{5} x^2(-x+5)dx = \frac{19}{6}$; $\frac{1}{256}\int_{-3}^{1} x(3x-7)(x+3)dx = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{256}\int_{1}^{5} x(-15x+11)(-x+5)dx = \frac{-13}{6}$.

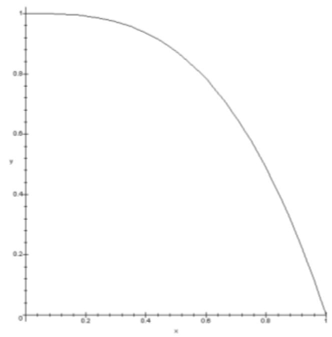
7. Exercice 21

La courbe ci-contre a pour équation $y = 1 - x^3$.

Hachurer le nuage uniforme ainsi défini : $0 < x < 10 < y < 1 - x^3$.

Tracer la courbe de régression de Y en X, le point moyen du nuage et la droite de régression de Y en X.

On donnera tous les calculs utiles.



8. Exercice 22

(X,Y) est un couple de variables aléatoires uniforme sur la partie $\mathcal{D}$ de R^2 ainsi définie : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$.

f_X, f_Y, $f_{X,Y}$ désignent les densités de probabilités respectives de X, Y, (X, Y). F_X désigne la fonction de répartition de X.

1. a) Dessiner $\mathcal{D}$. *(Unités : 10 cm sur chaque axe.)* **b)** Calculer l'aire (en unité d'aire) de $\mathcal{D}$. **c)** Déduire $f_{X,Y}(x, y)$.

2. Exprimer $f_X(x)$ et $F_X(x)$. Représenter f_X et F_X sur un même graphique. *(Unités : 10 cm sur chaque axe.)*

3. Déterminer l'espérance mathématique de X.

4. Déterminer la variance de X.

5. Pour x compris entre 0 et 1, **a)** déterminer la densité de probabilité conditionnelle de Y sachant que X = x,

b) puis l'espérance mathématique conditionnelle de Y sachant que X = x.

6. Sur le même graphique que $\mathcal{D}$, tracer la courbe de régression de Y en X.

7. a) Calculer l'espérance mathématique de Y.

b) Calculer la covariance de (X, Y).

c) Donner une équation de la droite de régression de Y en X.

d) Tracer cette droite sur le même graphique que $\mathcal{A}$.

9. Exercice 23

Soient :

$\mathcal{A}$ est l'ensemble des couples (x,y) de réels tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 \le y \le \cos x \end{cases}$.

(X,Y) est un couple de variables aléatoires uniforme sur $\mathcal{A}$.

Fonction	Fonction primitive
cos x	sin x
x cos x	x sin x + cos x
$x^2 \cos x$	$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ \sin(2x)$
$x \cos^2 x$	$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\ \sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$

1. Dessiner $\mathcal{A}$. On prendra 10 cm pour unité.
2. Déterminer l'aire de $\mathcal{A}$ exprimée en unité d'aire. Déduire la densité de probabilité conjointe $f_{X,Y}$ du couple (X, Y).
3. Déterminer la densité de probabilité marginale f_X de X.
4. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. Tracer la courbe d'équation $y = F_X(x)$ sur le dessin de la question 1.
5. Pour $0 < x < \pi/2$, déterminer la densité de probabilité conditionnelle $f_{Y/X=x}$ de Y sachant que X = x.
6. Donner une équation de la courbe $\mathcal{C}$ de régression de Y en X. Ajouter $\mathcal{C}$ au dessin de la question 1.
7. Calculer les espérances mathématiques E(X) et E(Y) de X et de Y. Ajouter au dessin de la question 1 le point moyen G (E(X), E(Y)) du nuage.
8. Calculer la variance Var (X) de X et la covariance Cov (X, Y) du couple (X, Y). Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ de régression de Y en X. Ajouter $\mathcal{D}$ au dessin de la question 1.

10. Exercice 24

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. La variable d'abscisse est notée x. La variable d'ordonnée est notée y. On considère les points A(3, -1), B(2, 2), C(-2, 1), D(1, -2). (X, Y) est un couple de variables aléatoires dont la densité de probabilité conjointe f est uniforme à l'intérieur du quadrilatère ABCD et nulle à l'extérieur. f_X, f_Y, $f_{X,Y}$ désignent les densités de probabilités respectives de X, Y, (X, Y). F_X, F_Y désignent les fonctions de répartition respectives de X et de Y.

1. Tracer le quadrilatère ABCD. Calculer son aire.
2. Déduire $f_{X,Y}(x, y)$ à l'intérieur de ABCD. Compléter le tableau suivant :

Droite	Equation du type ax + by + c = 0	Equation du type y = ax + b	Equation du type x = ay + b
(AB)			
(BC)			
(CD)			
(DA)			

3. Compléter les tableaux suivants :

	$y \le -2$	$-2 < y \le -1$	$-1 < y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y$
$f_Y(y)$					

	$x \le -2$	$-2 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x$
$f_X(x)$					
$F_X(x)$					

$f_{Y \mid X = x}(y)$					
$E(Y \mid X = x)$					

Pour $f_{Y \mid X = x}(y)$, ne pas oublier de discuter selon la valeur de y.
Tracer la courbe de régression de Y en X sur le même graphique que le quadrilatère ABCD.
Sur un deuxième graphique, tracer les courbes représentatives de f_X et de F_X.
Pour ce deuxième graphique, on choisira pour unités 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

11. Exercice 25: Exemple de calcul d'intégrale double.

$$\iint_{\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}}(x+y)dxdy = \int_0^1\left[\int_0^1(x+y)dx\right]dy = \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_0^1 dy = \int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = \left[\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1.$$

Hypothèses.

$f(x, y) = x + y$ si $\begin{cases}0 < x < 1\\ 0 < y < 1\end{cases}$; $f(x, y) = 0$ sinon.

(X, Y) couple de variables aléatoires absolument continu de densité de probabilité conjointe f.

Questions.

1. Expliquer pourquoi f est acceptable comme densité de probabilité.
2. Expliquer pourquoi les variables aléatoires X et Y sont identiquement distribuées.
3. a) Exprimer la densité de probabilité marginale f_X de X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
c) Calculer la variance V(X) de X.
4. On suppose, dans cette question seulement : $0 < x < 1$.
a) Exprimer la densité de probabilité conditionnelle $f_{Y/X=x}$ de Y sachant que X = x.
b) Exprimer l'espérance mathématique conditionnelle E(Y/X = x) de Y sachant que X = x.
c) Exprimer la variance conditionnelle V(Y/X = x) de Y sachant que X = x.
5. Tracer en repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ de régression de Y en X. On prendra 10 cm pour unité.
6. a) Calculer la covariance Cov(X, Y) du couple (X, Y).
b) Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ de régression de Y en X.
c) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la même figure que la courbe $\mathcal{C}$.

12. Exercice 26

(X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires absolument continues de densité de probabilité f ainsi définie : $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp -\frac{1}{2}\left[\left[\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2+\left[\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right]^2\right]$ ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 > 0$). f_1 et f_2 sont les densités de probabilités marginales de X_1 et de X_2. Déterminer f_1 et f_2. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

13. Exercice 27

Il existe un unique réel a tel que : $\int_{|x|<a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0{,}5$. ($a \approx 0{,}6745$). g est la fonction de 2 variables ainsi définie : $g(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi} e^{\frac{-\left(x_1^2+x_2^2\right)}{2}}$; h est la fonction indicatrice de la partie de R^2 ainsi définie : $(|x_1| - a)(|x_2| - a) > 0$; f est le produit gh. (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires absolument continues de densité de probabilité f. f_1 et f_2 sont les densités de probabilités marginales de X_1 et de X_2. Vérifier que f est une densité de probabilité. Déterminer f_1 et f_2. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Linéairement corrélées ?

14. Exercice 28 : L'aiguille de Buffon.

Georges Louis Leclerc, comte de Buffon, est un naturaliste français du dix-huitième siècle. Il est l'auteur de « *l'Histoire Naturelle* », ouvrage encyclopédique en 36 volumes.

Imaginons un plancher parfaitement lisse et horizontal constitué de lattes identiques, parallèles, de même largeur L ($L > 0$). Au dessus de ce plancher, on jette dans le plus grand désordre un grand nombre d'aiguilles identiques, de même longueur ℓ ($0 < \ell < L$). (Des allumettes conviennent pour réaliser l'expérience.) La proportion des aiguilles qui s'immobilisent à cheval sur 2 lattes est voisine de $2l/\pi L$. L'objectif est de comprendre pourquoi.

Notations, hypothèses.

On considère une aiguille donnée, immobilisée sur le plancher. On désigne par

- α ($0 \le \alpha \le \pi/2$) l'angle géométrique de l'aiguille avec la direction des lattes.
- x ($0 \le x \le L/2$) la distance de son centre au bord de latte le plus voisin.
- M (α, x) le point de coordonnées (α, x) dans un plan rapporté à un repère orthonormé (α en abscisse, x en ordonnée).M est donc intérieur au rectangle R défini par le système d'inéquations : $\begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi/2 \\ 0 \le x \le L/2 \end{cases}$.

Les aiguilles ayant été jetées au hasard, les probabilités relatives à x et à α sont uniformes et indépendantes, c'est-à-dire la probabilité pour que M appartienne à une partie donnée A de R d'aire S est proportionnelle à S.

1. Dessiner le rectangle R en prenant L = 4 et en prenant 5 cm pour unité. (Dans la suite, raisonner avec L quelconque.)

2. Quelle est la probabilité pour que M appartienne à une partie donnée A de R d'aire S ? (Répondre en fonction de L et de S.)

3. On suppose (dans cette question seulement) que l'extrémité de l'aiguille est sur une frontière entre deux lattes.

a) Exprimer x en fonction de α.

b) Tracer dans R (dessiné à la question 1) la courbe décrite par M lorsque α varie de 0 à $\pi/2$. On prendra $\ell = 2$ pour le dessin mais, dans la suite du devoir, on raisonnera avec ℓ quelconque.

4.a) Hachurer la partie A de R ainsi définie : M appartient à A si, et seulement si, l'aiguille est à cheval sur deux lattes.

b) Calculer (en unité d'aire, pas en cm^2) l'aire S de A. (Répondre en fonction de ℓ et de L.)

5. Conclure.

TD03- VECTEURS GAUSSIENS

1. Exercice 1

Soit (X,Y) un vecteur gaussien de moyenne (0,0) et de matrice de covariance-variance $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 1 \end{bmatrix}$ où $\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y)$ est inconnu. Nous supposons que les v.a. $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer Σ.

2. Soient U=X + Y et V=2X – Y, Montrer que (U,V) est un vecteur gaussien dont vous déterminerez la moyenne et la matrice de covariance-variance.

2. Exercice 2

Dans cet exercice $X = (X1, X2, X3, X4)$ désigne un vecteur gaussien de moyenne (0, 0, 0, 0) et de matrice de covariance-variance identité.

Montrer que $\frac{(X1-X2)^2}{2} + \frac{(X1+X2)^2}{2}$ suit une loi du $\chi^2(2)$

3. Exercice 3 (Vecteur non gaussien à marginales gaussiennes)

Soit X une variable aléatoire de loi N (0, 1) et T indépendante de X telle que : P [T = 1] = P [T = −1] = ½

1. Montrer que Y=TX suit une loi N (0, 1)

2. Montrer que P (X +Y = 0) = ½

3. En déduire que le vecteur aléatoire (X,Y) n'est pas gaussien

4. Exercice 4

Soit (X, Y) un vecteur Gaussien centré et de matrice de covariance l'identité I_2 et Z, Q les variables aléatoires définies par Z = (X+Y)/2 et Q =(X−Y)/2 . On pose $U = \frac{1}{2}((X - Z)^2 + (Y - Z)^2)$.

1. Calculer la matrice de covariance du vecteur (Z, Q).
2. Calculer E[U] et Var[U].
3. Montrer que les v.a. Z et U sont indépendantes

5. Exercice 5

Soit (X1,X2) un vecteur gaussien de moyenne (0,0) et de matrice de covariance-variance $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ avec $|\rho|$<1.

On définit un nouveau vecteur aléatoire (Y1,Y2) T par $\begin{cases} Y1 = \frac{X1}{\sqrt{3}} - X2 \\ Y2 = \frac{X1}{\sqrt{3}} + X2 \end{cases}$.

1. Calculer la variance Var(X1) et Cov(X1,X2)

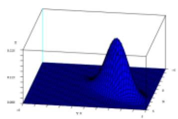
2. Dans quel cas, les deux variables X1 et X2 sont-elles indépendantes ?

3. Calculer la covariance Cov(Y1,Y2) du couple (Y1,Y2). Calculer les variances des variables aléatoires Y1 et Y2.

4. Les deux variables Y1 et Y2 sont-elles indépendantes ? Justifier clairement votre réponse.

6. Exercice 6

<u>Exemple :</u> La figure ci-contre correspond à un vecteur gaussien (X, Y) de moyenne m=(1, 2) et de matrice de dispersion $\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Montrer que sa densité est : $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi(2)^{1/2}} \exp(-((\mathrm{x}-1)^2 - \sqrt{2}(\mathrm{x}-1)(\mathrm{y}-2) + (\mathrm{y}-2)^2))$



TD04- CONVERGENCE ET THEOREME LIMITES

1. Exercice 1 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi normale $N(m; \sigma^2)$.

1. En faisant usage de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une borne inférieure de la probabilité que la variable X appartienne à l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$.

2. En faisant usage de la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite, calculer la probabilité exacte que la variable X appartienne à ce même intervalle.

3. Ces deux valeurs sont-elles proches l'une de l'autre ? Pouvez-vous justifier votre observation ?

2. Exercice 2 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi des grands nombre)

Soit X la variable aléatoire représentant le poids des individus d'une certaine population. On considère X1, X2, ..., Xn un n-échantillon de X, et l'on note par m et σ respectivement la moyenne et l'écart-type de X sur la population.

1. Rappeler les hypothèses qui portent sur les variables aléatoires X1, X2, ..., Xn.

2. On construit l'estimateur $\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}$ appelé estimateur de la moyenne.

(a) Calculer l'espérance de $\overline{X_n}$. Que peut-on dire de cet estimateur ?

(b) Calculer la variance de $\overline{X_n}$.

(c) Prouver à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que l'estimateur $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers m.

(d) Sous quel nom est connu ce résultat de convergence ?

3. Sur un échantillon de taille 12, la somme des poids vaut 852 kg, tandis que l'écart-type est de 2,3 kg. Donner une estimation ponctuelle du poids moyen de cette population.

3. Exercice 3 (TCL)

Soit X la variable aléatoire donnant le poids en kg d'un nouveau-né. On suppose que X est distribuée selon une loi N (μ; 0, 52) où le paramètre μ est inconnu. L'objectif est d'estimer μ, puis d'en donner un intervalle de confiance à 95%.

Dans ce but, on considère un n-échantillon de loi N (μ; 0, 52), et on pose $\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}$

1. Rappeler les résultats connus concernant l'estimateur $\overline{X_n}$.

2. Déterminer la loi de $\overline{X_n}$.

3. En déduire la loi de la variable aléatoire $\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma}$ où σ représente l'écart-type de la variable X.

4. Soit Z une variable aléatoire distribuée selon une loi N(0;1). Déterminer la constante $c_{1-\alpha}$ solution de l'équation $P(|Z| \leq c_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, pour $\alpha = 0, 05$.

5. En faisant usage des questions précédentes, déterminer l'intervalle auquel appartient la statistique $\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma}$ avec un niveau de confiance de 95%.

6. En déduire un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre μ sachant que le poids moyen de 40 nouveau-nés est de 3,6 kg

4. Exercice 4 (TCL)

Soit X1, X2, ..., Xn un n-échantillon d'une variable X de moyenne μ et de variance σ2. On considère les trois variables aléatoires suivantes :X_1, $\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}$ et $\overline{Y_n} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{i=n} iX_i$

1. Calculer l'espérance de chacune de ces variables. Commenter.

2. Calculer la variance de chacune de ces variables.

3. A votre avis, parmi les trois variables, laquelle est la plus efficace pour estimer le paramètre μ ?

5. Exercice 5 (TCL)

On considère un dé non pipé qu'on lance 100 fois. On s'intéresse à la somme des points obtenus.

1. Modéliser à l'aide de variables aléatoires cette situation.

2. En faisant usage du TCL, calculer la probabilité que cette somme soit comprise entre 300 et 400

6. Exercice 6 (Loi du Khi-2)

Soit X une v.a. distribuée selon une loi $N(1;\sigma^2)$ où σ est un paramètre inconnu. L'objectif est dans un premier temps d'estimer ce paramètre puis d'en donner un intervalle de confiance à 95%. Dans ce but, soit X1, X2, ..., Xn un n-échantillon de loi $N(1; \sigma^2)$. On pose $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - 1)^2$

1. Calculer l'espérance de la v.a. S_n^2.

2. Déterminer pour chaque $1 \leq i \leq n$ la loi de la v.a. $\frac{X_i-1}{\sigma}$

3. En déduire la loi de la v.a. $\sum_{i=1}^{i=n}(\frac{X_i-1}{\sigma})^2$

4. Soit Z une variable aléatoire distribuée selon une loi χ^2_{20}. Déterminer les constantes $\chi^2_{\alpha/2}$ et $\chi^2_{1-\alpha/2}$ solutions de l'équation $P(\chi^2_{\alpha/2} < Z < \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$, pour $\alpha = 0, 05$.

5. En faisant usage des questions précédentes, donner un intervalle de confiance pour le paramètre σ^2 (au niveau 95%) dans le cas où sur un échantillon de taille 20, on a $S_{20}^2 = 0, 5$.

6. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre σ.

7. Exercice 7 (TCL)

On veut estimer par un intervalle de confiance la taille moyenne des hommes adultes dans une population. Pour cela, on dispose d'un échantillon de 50 individus sur lequel on a obtenu $\overline{x_n}$ = 168 cm et s_n = 8,2 cm.

En faisant usage du TCL, donner un intervalle de confiance à 95% de la taille moyenne des hommes adultes au sein de cette population

8. Exercice 8 (Convergence en loi)

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{k}, & 0 < x \leq a \\ 0, & sinon \end{cases}$ où a est un paramètre réel strictement positif, et k une constante inconnue fonction de a.

1. Déterminer la constante k en fonction de a pour que f soit bien une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition F (exprimée en fonction de a) associée à X.

3. Calculer E[X] puis V[X].

4. On suppose que le paramètre a est inconnu. Pour X1, X2, ..., Xn un n-échantillon de X considérons la variable aléatoire Tn définie par : $T_n = \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$

(a) Calculer E[Tn]. En déduire une caractérisation de l'estimateur Tn.

(b) Calculer V[Tn]. En déduire que l'estimateur Tn converge en probabilité vers a. Justifier mathématiquement votre réponse.

(c) La réalisation d'un échantillon de taille 10 conduit aux valeurs numériques suivantes :

0, 5 1, 5 2 0, 7 2, 2 0, 9 1, 9 2, 5 2, 7 2

En déduire une estimation du paramètre a

9. Exercice 9 (Convergence en loi et loi de Student)

On suppose que le montant X des dépôts effectués sur un Livret A dans une certaine banque est distribué selon une loi $N(m; \sigma^2)$, avec m et σ deux paramètres inconnus. On se propose d'estimer ces deux paramètres en tirant au hasard n dépôts réalisés sur un Livret A.

1. Indiquer les estimateurs usuels des paramètres m et σ.

2. Montrer que l'estimateur usuel de m est sans biais et convergent en probabilité.

3. On a tiré au hasard 10 dépôts dont les montants, exprimés en euros, sont :

570 690 1350 2700 1000 1200 1400 400 860 900

(a) Estimer ponctuellement les paramètres m et σ.

(b) Donner un intervalle de confiance à 95% pour le paramètre m (Aide : faire usage du rapport d'une loi normale avec une loi du khi-deux)

10. Exercice 10 (TCL + intervalle de confiance)

Avant de lancer un nouveau produit sur le marché, un industriel souhaiterait connaître la proportion de personnes susceptibles d'acheter ce produit. Dans ce but, une enquête est menée auprès d'un échantillon représentatif de la population ciblée. La taille de cet échantillon est n = 960.

1. Modéliser cette étude en choisissant p comme paramètre pour représenter la proportion d'individus susceptibles d'acheter le produit.
2. Donner l'estimateur usuel de p.
3. Montrer que cet estimateur est sans biais et convergent en probabilité.
4. Estimer p dans le cas où 77 personnes de l'échantillon ont répondu favorablement à la question.
5. Enoncer le théorème auquel on doit se référer pour construire un intervalle de confiance pour le paramètre p.
6. Construire un intervalle de confiance pour p au niveau 90%

11. Exercice 11 (TCL + intervalle de confiance)

Des études antérieures laissent à supposer que le pourcentage de sujets de groupe sanguin A est p = 40% dans une certaine population. On se propose de s'en assurer par un sondage portant sur un échantillon de 600 sujets.

1. Soit Sn le nombre d'individus, au sein d'un échantillon de taille n, présentant le groupe sanguin A. Identifier la loi de probabilité de cette v.a.

2. Soit m_n le nombre moyen d'individus de groupe sanguin A auquel on doit s'attendre sur un échantillon de taille n.

(a) Estimer ce nombre moyen dans le cas de l'échantillon de taille n = 600.

(b) En justifiant l'utilisation du TCL, donner avec un niveau de confiance de 95% un intervalle (dit de pari) dans lequel devrait apparaître le nombre moyen d'individus de groupe sanguin A pour l'échantillon de taille n = 600.

3. En réalité, on observe sur cet échantillon 276 sujets de groupe A. Cette quantité est-elle incluse dans l'intervalle de pari calculé précédemment ? Identifier les trois raisons pour lesquelles cette quantité n'appartient pas à l'intervalle de pari.

4. On suppose que l'échantillon est représentatif de la population d'étude. Donner une estimation ponctuelle du paramètre p, puis un intervalle de confiance de niveau 95%.

5. En se basant sur l'estimation ponctuelle précédente, quelle aurait dû être la taille de l'échantillon représentatif afin, qu'au risque de 5%, le pourcentage soit connu avec une précision de 2% ?

12. Exercice 12

Pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle [0 ; 1/n]. Etudier la convergence de la suite (X_n).

13. Exercice 13

X_n ($n\in\mathbb{N}^*$) est une variable aléatoire ainsi distribuée :

Etudier la convergence de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

x	0	n
$P(X_n = x)$	$1 - 1/n$	$1/n$

14. Exercice 14

Voici les lois de probabilité des variables aléatoires X et X_n ($n\in\mathbb{N}^*$) :

1. Donner l'espérance mathématique, la variance et la fonction de répartition de X et de X_n.

Pour X_n, les résultats seront donnés en fonction de n.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi vers X ?

x	0	1
$P(X_n = x)$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Compléter en fonction de a et de n le tableau de la loi de probabilité conjointe :

X_n / X	0	1	Σ
0	a		1/2
1			1/2
Σ	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	1

Quelle est, en fonction de n, la valeur maximale de a ? Quelle est la valeur minimale de a ?

3. Donner, en fonction de n et de a, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X_n - X.

4. Calculer, en fonction de n et de a, l'espérance mathématique de $(X_n - X)^2$.

La suite $(X_n)_{n\in N^*}$ converge-t-elle quadratiquement vers X ? Donner, en fonction de n, une valeur de a pour laquelle la réponse est oui et une autre pour laquelle la réponse est non.

5. Calculer, en fonction de n et de a, la probabilité P (| $X_n - X$ | > ε) (ε > 0).

La suite $(X_n)_{n\in N^*}$ converge-t-elle en probabilité vers X ? (La réponse dépend de a.)

15. Exercice 15

Soient :

- a est un entier strictement positif.
- $(X_n)_{n\in IN^*}$ est une suite de variables aléatoires. La loi de probabilité de X_n est ainsi définie :

x	0	n
$P(X_n = x)$	$1-\frac{1}{n^a}$	$\frac{1}{n^a}$

Questions. (Chaque réponse sera justifiée.)

1. On suppose, dans cette question seulement : a = 3.

Calculer $E[(X_n)^2]$.

La suite (X_n) converge-t-elle vers 0 en convergence quadratique ? En probabilité ? En loi ?

2. On suppose, dans cette question seulement : a = 2.

Calculer $E[(X_n)^2]$.

La suite (X_n) converge-t-elle vers 0 en convergence quadratique ? En probabilité ? En loi ?

16. Exercice 16

On s'apprête à jeter n fois une pièce bien équilibrée. On désigne par S le nombre de « Pile » que l'on obtiendra.

1. Choisir n pour que P (0,4 ≤ S/n ≤ 0,6) ≈ 0,95.

2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, choisir n pour que P (0,4 ≤ S/n ≤ 0,6) ≥ 0,95.

Indication : si X ~ N (0 ; 1) alors P (-1,96 < X <1,96) ≈ 0,95.

17. Exercice 17 (Illustration du théorème limite fondamental.)

X_1, X_2, X_3 sont 3 variables aléatoires i.i.d. uniformes sur [0,1]. Y = $X_1 + X_2$. Z = $X_1 + X_2 + X_3$. T est une variable aléatoire normale de même espérance mathématique et de même variance que Z.

Tracer les histogrammes de Z et de T sur un même graphique (unités : 5 cm sur chaque axe).

18. Exercice 18

Une entreprise recrute du personnel. Elle examine n candidatures. Chaque candidat peut être :

- soit refusé (probabilité : 0,45),
- soit affecté au chantier A (probabilité : 0,5),
- soit affecté au chantier B (probabilité : 0,05).

Les décisions relatives aux différents candidats sont indépendantes les unes des autres. On désigne :

- par X le nombre de candidats affectés au chantier A, par Y le nombre de candidats affectés au chantier B,
- par $\overline{X}_n$ la proportion des candidats affectés au chantier A ($\overline{X}_n$ = X/n),
- par $\overline{Y}_n$ la proportion des candidats affectés au chantier B ($\overline{Y}_n$ = Y/n).

1) Donner en fonction de n les lois de probabilités de X et de Y,

les espérances mathématiques de X et de Y et les variances de X et de Y.

2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, trouver le plus petit entier n tel que :

a) $P(0,4 \leq \overline{X}_n \leq 0,6) \geq 0,99$; b) $P(0,04 \leq \overline{Y}_n \leq 0,06) \geq 0,99$.

3) En utilisant une approximation normale, trouver l'entier n le plus convenable pour avoir :

a) $P(0,4 \leq \overline{X}_n \leq 0,6) \approx 0,99$; b) $P(0,04 \leq \overline{Y}_n \leq 0,06) \approx 0,99$.

4) Commenter les 4 valeurs obtenues pour n dans les questions 2 et 3.

5) On suppose, dans cette question seulement, n = 200.

a) Quelle est la probabilité $P(98 < X < 102)$? (Utiliser une approximation et la justifier.)

b) Quelle est la probabilité $P(8 < Y < 12)$? (Utiliser une approximation et la justifier.)

19. Exercice 19

Soient $X_1, X_2,\ldots, X_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des variables aléatoires indépendamment identiquement distribuées, μ est leur espérance mathématique commune. σ^2 ($\sigma > 0$) est leur variance commune. On note : $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1. On suppose, dans cette question seulement : les X_i obéissent à la loi de Bernoulli de paramètre 0,5 ; n = 10.

a) Reconnaître la loi de probabilité de $10\overline{X_n}$.

b) Calculer $P(\overline{X_n} = 0,5)$.

2. On suppose, dans cette question seulement : les X_i obéissent à la loi de Bernoulli de paramètre 0,5 ; n = 100.

Calculer $P(0,4 < \overline{X_n} < 0,6)$.

3. On suppose, dans cette question seulement : les X_i obéissent à la loi de Bernoulli de paramètre 0,05 ; n = 100.

Calculer $P(0,04 < \overline{X_n} < 0,06)$.

4. On suppose, dans cette question seulement : les X_i obéissent à la loi normale centrée réduite ; n = 100.

Calculer $P(-0,05 < \overline{X_n} < 0,05)$.

5. On suppose, dans cette question seulement : $\mu = 0$; $\sigma = 1$; n = 100.

a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, donner un minorant de la probabilité $P(-0{,}2 < \overline{X_n} < 0{,}2)$.

b) Utiliser le théorème limite fondamental pour donner une valeur approchée de la probabilité $P(-0{,}2 < \overline{X_n} < 0{,}2)$.

6. On suppose, dans cette question seulement : $\mu = 0$; $\sigma = 1$.

a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, choisir n pour que $P(-0{,}1 < \overline{X_n} < 0{,}1) \geq 0{,}95$.

b) Utiliser le théorème limite fondamental pour choisir un entier n tel que $P(-0{,}1 < \overline{X_n} < 0{,}1) \approx 0{,}95$.

20. Exercice 20

Dans une population nombreuse, 60% des individus pèsent entre 55 Kg et 75 Kg. Les poids des autres sont extérieurs à cette fourchette. On prélève dans cette population un échantillon de n individus, numérotés de 1 à n. Pour tout i ($1 \leq i \leq n$), on désigne par X_i la variable aléatoire égale à :

1 si l'individu N° i pèse entre 55 Kg et 75 Kg, 0 dans tous les autres cas.

On considère que les variables aléatoires X_i ($1 \leq i \leq n$) sont indépendantes. On désigne par $\overline{X}_n$ la variable aléatoire $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

a) Reconnaître la loi de probabilité de X_i ($1 \leq i \leq n$) ; donner son espérance mathématique et sa variance.

b) Donner l'espérance mathématique et la variance de $\overline{X}_n$.

c) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, déterminer un entier n tel que : $P[0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7] \geq 0{,}99$.

d) Reconnaître la loi de probabilité de $n\overline{X}_n$; donner son espérance mathématique et sa variance.

e) Si n est assez grand, la loi de probabilité de $n\overline{X}_n$ peut être approchée par une loi de probabilité que l'on précisera.
A partir de quelle valeur de n cette approximation peut-elle être raisonnablement acceptée ?

f) A l'aide du théorème limite fondamental, déterminer un entier n tel que : $P[0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7] \approx 0{,}99$.
(On rappelle que si T est une variable aléatoire normale, centrée, réduite, alors : $P(|T| \leq 2{,}58) \approx 0{,}99$)
On n'obtient pas la même valeur de n qu'à la question c). Quelle est le résultat le plus fiable ?

21. Exercice 21

On considère une variable aléatoire X telle que $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma$.
On effectue n réalisations indépendantes de X, ce qui fournit l'échantillon théorique $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de n variables aléatoires de même loi que X. On pose $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

a) La loi de X est inconnue mais on sait que $n = 25$, $m = 160$, $\sigma = 40$.
Calculer une approximation de $P[150 \leq \overline{X}_n \leq 170]$ à l'aide du théorème limite fondamental.
Quelle minoration de la probabilité précédente donne l'inégalité de Tchébycheff ?

b) La loi de X est inconnue, $m = 160$, $\sigma = 40$.
Trouver les valeurs de n pour lesquelles on peut écrire : $P[155 \leq \overline{X}_n \leq 165] \geq 0{,}95$

- en utilisant le théorème limite fondamental ;
- en utilisant l'inégalité de Tchébycheff.

c) On suppose que X obéit à la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \theta)$.
Si $\theta = 0{,}4$ et $n = 25$, calculer $P[0{,}68 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}92]$ de façon exacte puis en utilisant le théorème limite fondamental.
Si $\theta = 0{,}0075$ et $n = 100$, calculer $P[\overline{X}_n > 0]$ par l'approximation de Poisson, puis en utilisant le théorème limite fondamental. Quelle est la meilleure approximation ?

22. **Exercice 22**

$X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires i.i.d. de même espérance mathématique μ et de même écart-type σ. $\overline{X}_n$ est leur variable aléatoire moyenne $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$. S_n est la variable aléatoire $n\overline{X}_n$.

1. On suppose dans cette question seulement : n = 100 ; μ = 0,6 ; $\sigma^2 = 0{,}24$.

a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff appliquée à $\overline{X}_n$, donner un minorant de la probabilité : $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7)$.

b) A l'aide du théorème de la limite centrée, donner une valeur approchée de la probabilité : $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7)$. Comparer avec le résultat obtenu au a). Commenter.

2. On suppose dans cette question seulement : μ = 0,6 ; $\sigma^2 = 0{,}24$.

a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff appliquée à $\overline{X}_n$, déterminer n pour que : $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7) > 0{,}95$.

b) A l'aide du théorème limite fondamental, déterminer n pour que : $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7) \approx 0{,}95$. Comparer avec le résultat obtenu au a). Commenter.

3. On suppose dans cette question seulement que les X_i sont des variables de Bernoulli de paramètre 0,6 et que n=100.

a) Quelle est la loi de probabilité de S_n ?

b) On peut approcher S_n par une variable aléatoire Y_n dont on précisera la loi de probabilité. Justifier cette approximation.

c) Approcher S_n par Y_n, c'est approcher $\overline{X}_n$ par une variable aléatoire Z_n dont on précisera la loi de probabilité.

Cette approximation est-elle raisonnable ?

14. On suppose dans cette question seulement que les X_i sont des variables de Bernoulli de paramètre 0,06 et que n=100.

a) Quelle est la loi de probabilité de S_n ?

b) On peut approcher S_n par une variable aléatoire Y_n dont on précisera la loi de probabilité. Justifier cette approximation. A l'aide de cette approximation, évaluer la probabilité : $P(0{,}05 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}07)$.

c) A l'aide du théorème limite fondamental, évaluer la probabilité : $P(0{,}05 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}07)$. Comparer avec le résultat obtenu au b). Commenter.

23. **Exercice 23**

On s'intéresse à un phénomène de Poisson de cadence moyenne 1 (en moyenne, une occurrence par unité de temps). L'observation commençant maintenant, on numérote à partir de 1 les occurrences qui vont se produire. On désigne par T_n le temps d'attente de l'occurrence N°n ($n \in N^*$), par M_n la variable $\frac{T_n}{n}$ et par X_t le nombre d'occurrences qui se produiront pendant la prochaine durée t (t > 0) .

<u>Rappels</u> *:*

- X_t obéit à la loi de Poisson de paramètre t ;
- T_n obéit à une loi d'Erlang de paramètres 1 et n ;
- T_n peut être considéré comme la somme de n variables aléatoires indépendantes exponentielles de même paramètre 1 ;
- $[T_n > t] \Leftrightarrow [X_t < n]$.

<u>Valeurs approchées utiles à la question 4 :</u> $P(X_{40} \leq 49) \approx 0{,}9297$; $P(X_{60} \leq 49) \approx 0{,}0844$.

1. Exprimer (éventuellement en fonction de n) l'espérance mathématique et l'écart-type de M_n.

2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, donner un minorant de la probabilité : $P(0{,}8 < M_{50} < 1{,}2)$.

3. A l'aide du théorème limite fondamental, donner une valeur approchée de cette même probabilité. Que penser de l'utilisation de ce théorème ici ?

4. Donner l'arrondi à 10^{-4} de cette même probabilité en utilisant le rappel d).

5. a) Donner (en fonction de n) la densité de probabilité g_n de M_n.

b) Donner l'arrondi à 10^{-4} de l'intégrale $\int_{0,8}^{1,2} \frac{50^{50}}{49!} x^{49} e^{-50x} dx$. (Il est déconseillé de chercher une primitive.)

24. **Exercice 24**

Dans une population humaine donnée, 40% des individus ont plus de 50 ans et 5% des individus ont plus de 80 ans. On effectue dans cette population n tirages aléatoires d'un individu avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$).

X_i ($1 \leq i \leq n$) est la variable aléatoire ainsi définie :

si l'individu choisi lors du tirage N°i a plus de 50 ans, alors $X_i = 1$; sinon, $X_i = 0$.

Y_i ($1 \le i \le n$) est la variable aléatoire ainsi définie :

si l'individu choisi lors du tirage N°i a plus de 80 ans, alors $Y_i = 1$; sinon, $Y_i = 0$.

On définit : $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ et $\overline{Y}_n = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}$.

1. Reconnaître la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires X_i, Y_i, $n\overline{X}_n$, $n\overline{Y}_n$.

2. a) Donner les valeurs possibles pour $\overline{X}_n$ et la probabilité de chacune de ces valeurs.

b) Donner les valeurs possibles pour $\overline{Y}_n$ et la probabilité de chacune de ces valeurs.

3. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 100$.

a) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de probabilité de $n\overline{X}_n$? Utiliser cette approximation pour calculer une valeur approchée de $P(0{,}35 \le \overline{X}_n \le 0{,}5)$.

b) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de probabilité de $n\overline{Y}_n$? Utiliser cette approximation pour calculer une valeur approchée de $P(0{,}04 \le \overline{Y}_n \le 0{,}07)$.

4. a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, trouver un entier n tel que $P(0{,}3 \le \overline{X}_n \le 0{,}5) \ge 0{,}9$.

b) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, trouver un entier n tel que $P(0{,}03 \le \overline{Y}_n \le 0{,}07) \ge 0{,}9$.

5. a) On suppose, dans cette question seulement, que $n = 240$. A l'aide du théorème limite fondamental, trouver un réel strictement positif α tel que $P(|\overline{X}_n - 0{,}4| \le \alpha) \approx 0{,}9$. (Arrondir à 10^{-2}.)

b) On suppose, dans cette question seulement, que $n = 1188$. A l'aide du théorème limite fondamental, trouver un réel strictement positif β tel que $P(|\overline{Y}_n - 0{,}05| \le \beta) \approx 0{,}9$. (Arrondir à 10^{-2}.)

25. **Exercice 25**

Un examinateur désabusé distribue les notes aléatoirement. Il attribue à chaque candidat une note choisie au hasard parmi les entiers 0, 1, 2, …, 19. Il considère que, la perfection n'étant pas de ce monde, la note 20 ne doit pas être attribuée. Il note les candidats indépendamment les uns des autres. Seront déclarés admis les candidats obtenant un note supérieure ou égale à 10, et eux seulement. Les candidats obtenant la note 0, et eux seulement, perdront le droit de se présenter une nouvelle fois à cet examen.

1. Sylvain est l'un des candidats. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : Sylvain sera admis. **B** : Sylvain perdra le droit de se présenter une nouvelle fois. **C** : Sylvain obtiendra 9 ou 10.
2. Il y a exactement 100 candidats. X est la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui seront admis. Y est la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui perdront le droit de se présenter une nouvelle fois.
a) Donner la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
b) Proposer une approximation convenable pour X et utiliser cette approximation pour évaluer la probabilité qu'il y ait au moins 55 candidats admis.
c) Donner la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et sa variance.
d) Proposer une approximation convenable pour Y et utiliser cette approximation pour évaluer la probabilité qu'il y ait au plus 2 candidats perdant le droit de se présenter une nouvelle fois.
3. Il y a exactement 100 candidats, numérotés de 1 à 100. X_i est la variable aléatoire égale à la note qui sera attribuée au candidat numéro i ($1 \le i \le 100$). $\overline{X_{100}}$ est la variable aléatoire égale à la moyenne des 100 notes qui seront attribuées.
a) Donner l'espérance mathématique et la variance de X_i ($1 \le i \le 100$).
Indications : $1 + 2 + \ldots + 19 = 190$; $1^2 + 2^2 + \ldots + 19^2 = 2470$.

b) Donner l'espérance mathématique et la variance de $\overline{X_{100}}$.

c) L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev fournit un minorant de la probabilité $P(8{,}5 \le \overline{X_{100}} \le 10{,}5)$. Trouver ce minorant.

d) Le théorème limite fondamental permet de donner une valeur approchée de la probabilité $P(8{,}5 \le \overline{X_{100}} \le 10{,}5)$. Trouver cette valeur approchée.

TD05- LOIS STATISTIQUES USUELLES (χ2, STUDENT, FISHER, GAMMA)

1. Exercice 1 (Loi du Khi-2 et composition)

Soit $X \sim N(0,1)$ et définissons $Y = X^2$.

Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité. Représenter graphiquement cette densité.

Cette distribution est appelée une loi de χ_1^2 (Khi-2 à un degré de liberté).

2. Exercice 2 (Loi du Khi-2)

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi du khi-2 à 7 degrés de liberté.

1. Déterminer les nombres x tels que

(a) $P(X \geq x) = 0,01$. (b) $P(X \leq x) = 0,5$. (c) $P(X \leq x) = 0,7$. (d) $P(X \leq x) = 0,05$. (e) $P(X \leq x) = 0,995$.

2. Déterminer les nombres α tels que

(a) $P(X \leq 1,24) = \alpha$ (b) $P(X \leq 4{,}255) = \alpha$ (c) $P(X \leq 12{,}02) = \alpha$ (d) $P(X \geq 3{,}82) = \alpha$ (e) $P(1{,}69 < X < 6{,}346) = \alpha$.

3. Exercice 3 (Loi de Student)

Soit T une variable aléatoire distribuée selon une loi de Student à 16 degrés de liberté.

1. Déterminer les nombres t tels que

(a) $P(T \leq t) = 0,75$. (b) $P(T \leq t) = 0,9$. (c) $P(T \geq t) = 0,75$. (d) $P(T \geq t) = 0,6$. (e) $P(T \leq t) = 0,9925$.

2. Déterminer les nombres α tels que

(a) $P(T \leq 1{,}337) = \alpha$. (b) $P(T < 3{,}686) = \alpha$. (c) $P(T \leq 3{,}25) = \alpha$. (d) $P(T \geq 0{,}865) = \alpha$. (e) $P(0{,}535 \leq T < 1{,}746) = \alpha$.

4. Exercice 4

1. Donner la valeur exacte de $\Gamma(5/2)$.

Donner la densité de probabilité pour une loi $\chi^2(5)$.

Donner la fonction génératrice des moments relative à cette même loi.

5. Exercice 5

Calculer le rapport $\dfrac{\Gamma(6) - \Gamma(5,5)}{\Gamma(5,5) - \Gamma(5)}$.

6. Exercice 6

x est un réel. X est une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f, d'espérance mathématique E(X) et de variance Var(X).M_X est la fonction génératrice des moments de X.

1. Déterminer $\Gamma(x)$, $\Gamma(6)$ et $\Gamma(7/2)$.

2. Déterminer f(x), E(X), Var(X) et $M_X(t)$ dans chacun des cas suivants :

a) X obéit à la loi gamma de paramètres α (α > 0) et λ (λ > 0).

b) X obéit à la loi d'Erlang de paramètres 5 et 3. **c)** X obéit à la loi $\chi^2(7)$.

7. Exercice 7

X est une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f, d'espérance mathématique E(X), de variance V(X) et de fonction génératrice des moments M. Sa loi de probabilité est $\chi^2(6)$.

1. Donner $\Gamma(3)$, E(X), V(X), M(t) et f(x). **2.** Donner les paramètres de l'unique loi d'Erlang identique à la loi $\chi^2(6)$.

8. Exercice 8

X est une variable aléatoire obéissant à la loi gamma de paramètre de forme 1 et de paramètre d'échelle 1. Calculer la probabilité $P(X \leq 1)$.

9. **Exercice 9**

X est une variable aléatoire obéissant à une loi gamma de paramètre de forme α ($\alpha>0$) et de paramètre d'échelle 1/2.

1. On suppose dans cette question seulement : $\alpha = 4$.

a) Calculer $\Gamma(\alpha)$. **b)** Donner la densité de probabilité de X.

c) Donner un autre nom de la loi de probabilité de X. (Décomposer X à l'aide de variables exponentielles de paramètre ½).

2. On suppose dans cette question seulement : $\alpha = 4,5$.

a) Calculer $\Gamma(\alpha)$. **b)** Donner la densité de probabilité de X.

c) Donner un autre nom de la loi de probabilité de X. (Décomposer X à l'aide de variables normales centrées réduites)

10. **Exercice 10**

1. Calculer chacun des nombres suivants : $\Gamma(1)$; $\Gamma(6)$; $\Gamma(1/2)$; $\Gamma(3/2)$; $\Gamma(5/2)$; $\Gamma(7/2)$.

2. Donner une fonction densité de probabilité convenable pour chacune des distributions suivantes :

E (1/4) ; Erlang (6 ; 1/4) ; $\chi^2(1)$; $\chi^2(7)$; gamma (5/2 ; 1/4).

3. Pour chacune des distributions précédentes, donner l'espérance mathématique et la variance.

11. **Exercice 11 (Loi du Khi-2)**

X et Y sont deux variables aléatoires normales, centrées, réduites, indépendantes. Calculer la probabilité suivante : $P(X^2 + Y^2 \leq 2)$.

12. **Exercice 12 (Loi du Khi-2)**

9. U et V sont deux variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

$X = U^2$, $Y = V^2$, $Z = X + Y$.

X, Y, Z ont pour densités de probabilités respectives f_X, f_Y, f_Z.

X, Y, Z ont pour fonctions génératrices des moments respectives M_X, M_Y, M_Z.

f est la fonction ainsi définie : $f(t) = \dfrac{1}{1-2t}$.

1. Calculer $f'(0)$, $f''(0)$, $f''(0) - [f'(0)]^2$.

2. Donner $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(z)$ (x, y, z réels).

3. Donner $M_X(t)$, $M_Y(t)$, $M_Z(t)$ (t réel).

4. Donner l'espérance mathématique et la variance de chacune des variables aléatoires X, Y, Z.

5. z est un réel strictement positif. Sachant que $f_Z(z)=\int_0^z f_X(x).f_Y(z-x).dx$, trouver l'intégrale $\int_0^z \dfrac{dx}{\sqrt{x(z-x)}}$.

13. **Exercice 13 (Loi du Khi-2)**

Soient X, Y, Z, T sont des variables aléatoires normales, centrées, réduites, indépendantes, $U = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$, R et S sont deux variables aléatoires exponentielles, de même paramètre ½, indépendantes et $V = R + S$.

1. Donner la densité de probabilité de U, sa fonction génératrice des moments, son espérance mathématique et sa variance.

2. Donner la densité de probabilité de V, sa fonction génératrice des moments, son espérance mathématique et sa variance.

14. Exercice 14

Soient T est une variable aléatoire exponentielle de paramètre ½,

U est une variable aléatoire normale, centrée, réduite, indépendante de T. $X = T + U^2$.

Donner la densité de probabilité de X, sa fonction génératrice des moments, son espérance mathématique et sa variance.

15. Exercice 15

T est une variable aléatoire absolument continue de fonction de répartition F ainsi définie :

$$F(t) = \begin{cases} 1-(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{48})\, e^{-t/2} & si\ t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer une densité de probabilité f de T.

2. Reconnaître la loi de probabilité de T (nom et paramètre(s)).

3. $X_1, X_2, ..., X_8$ sont huit variables aléatoires normales, centrées, réduites, indépendantes. Calculer la probabilité que la somme de leurs carrés soit inférieure à 6.

16. Exercice 16

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$.

17. Exercice 17

Trouver la valeur de chacune des intégrales suivantes.

$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^5 dt$; $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^3\sqrt{t}dt$; $\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}dt$; $\int_0^1 t(1-t)\sqrt{t}dt$; $\int_0^1 x^3(1-x)\sqrt{(1-x)}dx$.

18. Exercice 18

Calculer l'intégrale : $\int_{-2}^{4} \frac{(x+2)^3}{\sqrt{4-x}}dx$. On pourra effectuer le changement de variable $y = (x + 2)/6$.

19. Exercice 19

X est une variable aléatoire réelle obéissant à la loi de probabilité bêta de paramètres α et β.

1. On suppose dans cette question seulement : $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

Reconnaître (parmi les lois de probabilités étudiées en première année) la loi de probabilité de X.

Tracer l'histogramme de X, c'est à dire la courbe représentative de sa densité de probabilité.

Donner l'espérance mathématique et la variance de X.

2. On suppose dans cette question seulement : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Donner la densité de probabilité de X. Tracer l'histogramme de X. Donner l'espérance mathématique et la variance de X.

3. On suppose dans cette question seulement : $\alpha = 1{,}5$ et $\beta = 2$. Donner la densité de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

20. Exercice 20

X et Y sont deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre 1. $U = X/(X+Y)$.

1. Déterminer la loi de probabilité de U. Tracer son histogramme.

2. Déterminer la probabilité P (X < 2Y).

21. **Exercice 21 (modèle de Poisson)**

Crapi et Crapo gobent les mouches. La première sera pour Crapi, la deuxième pour Crapo. Comme chacun sait, l'arrivée des mouches est conforme au modèle aléatoire de Poisson.

Evaluer la probabilité qu'à partir de maintenant la deuxième mouche vive au moins trois fois plus longtemps que la première mouche.

22. **Exercice 22**

Une entreprise de maçonnerie construit des maisons individuelles selon un modèle de Poisson, à la cadence moyenne d'une maison par an. Une maison vient d'être terminée. Les deux prochaines seront construites à Carihaut et les trois suivantes à Caribas. On désigne par

- T la variable aléatoire égale à la durée, en années, que prendra la construction des deux maisons de Carihaut.
- U la variable aléatoire égale à la durée, en années, que prendra la construction des trois maisons de Caribas.

On pose $X = T/(T+U)$ et $Y = T/U$.

1. Prouver que la densité de probabilité f de X est ainsi définie : si $0 < x < 1$ alors $f(x) = 12x(1-x)^2$; sinon, $f(x) = 0$.

2. Exprimer la variable aléatoire X en fonction de la variable aléatoire Y.

3. Calculer la probabilité que le chantier de Caribas soit plus long que celui de Carihaut

23. **Exercice 23 (modèle de Poisson)**

Manon et Maxime s'éclairent à la bougie, indépendamment l'un de l'autre. Ils usent leurs bougies à la même cadence moyenne d'une bougie par mois, selon un même modèle aléatoire de Poisson. Manon dispose de quatre bougies. Maxime dispose seulement de trois bougies. On désigne par :

- T la variable aléatoire égale à la durée, en mois, pendant laquelle Manon pourra s'éclairer, grâce à ses quatre bougies.
- U la variable aléatoire égale à la durée, en mois, pendant laquelle Maxime pourra s'éclairer, grâce à ses trois bougies.

On pose $X = T/(T+U)$

1. Prouver que la densité de probabilité f de X est définie : si $0 < x < 1$ alors $f(x) = 60x^3(1-x)^2$; sinon, $f(x) = 0$.

2. Calculer la probabilité que Manon épuise ses bougies avant Maxime.

24. **Exercice 24 (Processus de Poisson)**

Dans un phénomène de Poisson, on désigne par T_n le temps d'attente de l'occurrence n° n ($n \geq 1$). On rappelle que T_n obéit à la loi gamma de paramètre de forme n et de paramètre d'échelle égal à la cadence moyenne du phénomène. On rappelle aussi que la différence $T_{n+k} - T_n$ est indépendante de T_n (le futur étant indépendant du passé) et distribuée comme T_k (le temps étant homogène).

Calculer la probabilité $P(T_3 \leq \frac{3}{2} T_2)$.

25. **Exercice 25 (Processus de Poisson et lois Gamma)**

On considère un processus de Poisson.

On numérote selon l'ordre chronologique les occurrences qui vont se produire à partir de maintenant. On désigne par

- X le temps d'attente, à partir de maintenant, de l'occurrence N° 1.
- Y la durée séparant les occurrences N° 1 et N° 2.
- Z la durée séparant les occurrences N° 2 et N° 3.
- $T = X/(X+Y)$ et par $U = (X+Y)/(X+Y+Z)$

1. X, Y, Z sont des variables aléatoires obéissant à une même loi gamma.

a) Expliquer pourquoi X, Y, Z sont indépendantes. **b)** Donner leur paramètre de forme commun.

2. T et U sont des variables aléatoires obéissant à des lois bêta.

a) Préciser la densité de probabilité de T. Tracer l'histogramme de T.

b) Préciser la densité de probabilité de U. Tracer l'histogramme de U.

3. Calculer la probabilité P (X + Y > Z).

26. Exercice 26 (Composées de lois du Khi-deux)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, obéissant à la loi χ^2 (2). On pose :

$$Z = X/Y \; ; T = X/(X+Y) \; ; p = P(4X < 3Y).$$

1. Donner la densité de probabilité de Z. Déduire p. **2.** Donner la densité de probabilité de T. Retrouver p.

27. Exercice 27 (modèle de Poisson et loi de Fisher)

Les occurrences à venir d'un phénomène régi par le modèle de Poisson sont numérotées à partir de 1 selon leur ordre d'apparition. On désigne par T_n le temps d'attente de l'occurrence N°n ($n \in \mathbb{N}^*$). On pose $p = P(3T_2 < T_6)$.

1. Rappeler le nom et les paramètres (en fonction de la cadence moyenne λ) de la loi de probabilité de T_n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; faire de même pour $T_{n+k} - T_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$) ; rappeler pourquoi T_n et $T_{n+k} - T_n$ sont indépendantes.

2. Soit X défini par $X = T_2/T_6$

a) Donner la densité de probabilité et la fonction de répartition de X. b) Calculer p.

c) Donner l'espérance mathématique et la variance de X.

3. Soit Y défini par $Y = 2T_2/(T_6 - T_2)$.

a) Donner la densité de probabilité et la fonction de répartition de Y. (Pour déduire la fonction de répartition de la densité de probabilité, on pourra effectuer le changement de variable t = y + 2).

b) Retrouver p.

28. Exercice 28 (modèle de Poisson et loi de Fisher)

Dans un processus de Poisson, on numérote à partir de 1 les prochaines occurrences. On désigne par :

- T le temps d'attente de l'occurrence N° 3
- U la durée séparant les occurrences N°s 3 et 5.
- T + U désigne donc le temps d'attente de l'occurrence N° 5.
- p la probabilité P(T < U).

1. Soit X une variable aléatoire obéissant à la loi de probabilité bêta de paramètres 3 et 2.

a) Donner la densité de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

b) Donner la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative (unité : 10 cm sur chaque axe).

c) Calculer la probabilité p et la représenter sur le graphique tracé en b).

2. Soit Y une variable aléatoire obéissant à la loi de probabilité de Fisher-Snedecor de paramètres 6 et 4.

a) Donner la densité de probabilité de Y. b) Exprimer la probabilité p en fonction de Y.

c) Déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{2/3} \frac{y^2}{(2+3y)^5} dy$.

29. Exercice 29 (modèle de Poisson, lois Gamma, Beta et de Fisher)

La file d'attente devant un guichet administratif s'écoule selon un modèle de Poisson. Aline, Brice et Coralie sont les trois seules personnes à patienter encore. Elles passeront dans cet ordre. L'objet de l'exercice est le calcul (**à ne pas effectuer tout de suite**) de la probabilité p qu'à partir de maintenant Coralie attende au moins deux fois plus longtemps qu'Aline. On considère que l'unité de temps du modèle de Poisson est choisie de telle sorte que la cadence moyenne soit ½. On désigne par

- T la variable aléatoire égale au temps d'attente d'Aline à partir de maintenant.
- U la variable aléatoire égale à la durée qui séparera les passages d'Aline et de Coralie.

1. (Lois Gamma)

a) T et U obéissent à des lois gamma. Donner leurs paramètres de formes respectifs.

b) T et U sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.

2. (Loi Bêta) Soit $X = T/(T+U)$.

a) Donner la densité de probabilité de X. **b)** Tracer l'histogramme de X.

c) Calculer p. **d)** Matérialiser p sur la figure tracée en b).

3. (Loi de Fisher-Snedecor) Soit $X = 2T/U$.

a) Donner la densité de probabilité de Z. **b)** Retrouver p.

TD01- COUPLES DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES ET INDEPENDANCE-CORRECTION

1. Exercice 1

1. On vérifie aisément que tous les coefficients sont supérieurs ou égaux à 0, et que par ailleurs la somme vaut 1.
2. La loi marginale de X est

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$2/12$	$4/12$	$6/12$

La loi marginale de Y est

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	$6/12$	$3/12$	$3/12$

3. On a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) = \frac{28}{12}$$

et

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_y y\mathbb{P}(Y = y) = \frac{9}{12}$$

4. On a

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_x x^2\mathbb{P}(X = x) = \frac{72}{12}$$

et

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_y y^2\mathbb{P}(Y = y) = \frac{15}{12}$$

On en déduit alors que

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{80}{144}$$

et

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{99}{144}$$

5. On a

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Or, on a

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{20}{12}$$

Finalement, on obtient

$$Cov(X, Y) = \frac{20}{12} - \frac{28}{12} \times \frac{9}{12} = -\frac{1}{12}$$

6. La loi conditionnelle de Y sachant $X = 1$ est

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y \mid X = 1)$	$1/2$	0	$1/2$

2. Exercice 2

1. La loi marginale de X est

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	0.44	0.21	0.35

La loi marginale de Y est

y	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=y)$	0.31	0.38	0.06	0.25

2. On a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x) = 0.91$$

et

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_y y\mathbb{P}(Y=y) = 1.25$$

3. La loi conditionnelle de X sachant $Y=2$ est

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x \mid Y=2)$	0	2/3	1/3

4. On a

$$\mathbb{E}[X \mid Y=2] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x \mid Y=2) = \frac{4}{3}$$

et

$$\mathbb{E}[X^2 \mid Y=2] = \sum_x x^2\mathbb{P}(X=x \mid Y=2) = 2$$

Finalement, on obtient

$$\mathbb{V}[X \mid Y=2] = \mathbb{E}[X^2 \mid Y=2] - (\mathbb{E}[X \mid Y=2])^2 = \frac{2}{9}$$

5. On a

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Or, on a

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1.76$$

Finalement, on obtient

$$Cov(X,Y) = 1.76 - 0.91 \times 1.25 = 0.6225$$

On a

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}}$$

Or, comme on a

$$\mathbb{E}[X^2] = 1.61 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[Y^2] = 2.87$$

on obtient

$$\mathbb{V}[X] = 0.7819 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[Y] = 1.3075$$

Finalement, on obtient

$$\rho(X,Y) = 0.6157$$

6. D'après le calcul précédent, on observe que les variables X et Y sont corrélées. Par conséquent, elles ne sont pas indépendantes.
7. Soit la v.a. $W = Y^2 - X$. Pour déterminer la loi de W, il convient dans un premier temps d'identifier les valeurs possibles que peut prendre cette v.a. Or, il est clair que l'ensemble des valeurs possibles est $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$. Maintenant, pour obtenir la loi de W, il faut calculer les probabilités de la forme

$$\mathbb{P}(W = w) \qquad \forall\, w \in E$$

On obtient alors

- $\mathbb{P}(W = -2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 0.04$
- $\mathbb{P}(W = -1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 0.12$
- $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0.33$
- $\mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0.20$
- $\mathbb{P}(W = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0.02$
- $\mathbb{P}(W = 3) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0.04$
- $\mathbb{P}(W = 4) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 0$
- $\mathbb{P}(W = 7) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 0.22$
- $\mathbb{P}(W = 8) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = 0.01$
- $\mathbb{P}(W = 9) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 3) = 0.02$

On vérifie aisément que les valeurs sont toutes supérieures ou nulles, et que leur somme vaut l'unité. Par conséquent, elles forment une distribution. Finalement, sachant que l'évènement $\{W = 4\}$ est de probabilité nulle, la loi de W peut être résumée comme suit :

w	-2	-1	0	1	2	3	7	8	9
$\mathbb{P}(W = w)$	0.04	0.12	0.33	0.20	0.02	0.04	0.22	0.01	0.02

3. Exercice 3

1. La loi marginale de X est

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$18/60$	$42/60$

La loi marginale de Y est

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y)$	$2/6$	$3/6$	$1/6$

2. On note que

$$\mathbb{P}(X=0, Y=2) \neq \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=2)$$

Par conséquent, les deux variables ne sont pas indépendantes.

3. On a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x) = \frac{7}{10}$$

et

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_y y\mathbb{P}(Y=y) = \frac{5}{6}$$

On a

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \frac{7}{12}$$

4. Ce dernier résultat confirme la réponse à la question 2 car dans le cas d'une indépendance entre les variables X et Y, on devrait avoir

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$$

résultat qui n'est pas vérifié dans le cas présent.

4. Exercice 4

Toute constante.

5. Exercice 5

Z est indépendante de X et de Y mais pas de X + Y.

6. Exercice 6

E(X) = 7/5 = 1,4 ; E(Y) = 31/15 = 2,0$\underline{6}$; Var(X) = 31/25 = 1,24 ; Var(Y) = 434/225 = 1,92$\underline{8}$; Cov(X, Y) = 13/75 = 0,17$\underline{3}$;

Cor(X, Y) = $\frac{13}{31\sqrt{14}}$ ≈ 0,1121 ; Equation de la droite de régression de Y en X : $y - \frac{31}{15} = \frac{13}{93}(x - \frac{7}{5})$; y ≈ 0,14x + 1,87 ;

E(Y | X = 0) = 15/8 = 1,875 ; E(Y | X = 1) = 16/9 = 1,$\underline{7}$; E(Y | X = 2) = 17/6 = 2,8$\underline{3}$; E(Y | X = 3) = 2.

7. Exercice 7

a)

2 1	1	2	3	4	5	6
1	1 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1
2	2 0	1 0	0 2	0 2	0 2	0 2
3	3 0	1 1	1 0	0 3	0 3	0 3
4	4 0	2 0	1 1	1 0	0 4	0 4

Y X	0	1	2	3	4	5	Σ
0		5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	15/36
1	6/36	4/36	2/36				12/36
2	3/36	1/36					4/36
3	2/36						2/36

5	5 0	2 1	1 2	1 1	1 0	0 5
6	6 0	3 0	2 0	1 2	1 1	1 0

4	1/36						1/36
5	1/36						1/36
6	1/36						1/36
Σ	14/36	10/36	6/36	3/36	2/36	1/36	1

b) E(X) = 41/36 ; E(Y) = 11/9

c) $\begin{bmatrix} \frac{2747}{1296} & \frac{-361}{324} \\ \frac{-361}{324} & \frac{289}{162} \end{bmatrix}$

d)

x	0	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	15/36	12/36	4/36	2/36	1/36	1/36	1/36
E(Y | X = x)	7/3	2/3	¼	0	0	0	0
Var(Y | X = x)	14/9	5/9	3/16	0	0	0	0

E[Var(Y | X)] + Var[E(Y | X)] = $\frac{41}{48} + \frac{1205}{1296} = \frac{289}{162}$ = Var(Y).

e) Droite de régression de Y en X : 1444x + 2747y – 5002 = 0 ; y ≈ -0,5257x + 1,8209

8. Exercice 8

1.

Y X	1	2	3	4	Total
1	0,06	0,02	0,04	0,08	0,2
2	0,1	0,06	0,02	0,04	0,22
3	0,04	0,08	0,1	0,02	0,24
4	0,02	0,04	0,08	0,02	0,16
5	0,08	0,06	0,02	0,02	0,18
Total	0,30	0,26	0,26	0,18	1

2. P(X ≤ 2 et Y ≥ 3) = 0,18 ; P(X > Y) = 0,54.

3. E(X) = 2,9 ; E(Y) = 2,32 ; V(X) = $\frac{189}{100}$ = 1,89 ; V(Y) = $\frac{736}{625}$ = 1,1776 ; Cov(X, Y) = $\frac{-47}{250}$ = -0,188 ; r(X, Y) ≈ -0,1260.

4. Equation de la droite de régression de Y en X : y = ax + b avec a = $\frac{-94}{945}$ ≈ -0,0995 et b = $\frac{493}{189}$ ≈ 2,6085.

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	0,2	0,22	0,24	0,16	0,18
E(Y/X = x)	2.7	2	29/12 ≈ 2,42	2,625	17/9 ≈1,89
$E(Y^2 / X = x)$	8,9	58/11 ≈ 5,27	79/12 ≈ 6,58	7,625	41/9 ≈ 4,56
V(Y/X = x)	1,61	14/11 ≈ 1,27	107/144 ≈ 0,74	0,734375	80/81 ≈ 0,99

6. E(V(Y / X)) = 19361/18000 ≈ 1,08 ; V(E(Y / X)) = 98719/18000 – $2{,}32^2$ = 9179/90000 ≈ 0,10
E(V(Y / X)) + V(E(Y / X)) = 736/625 = V(Y) = 1,1776.

9. Exercice 9

1.

Inventaire des possibilités :

(a, b)	Effectif	a – b	a + b
(1, 1)	6	0	2
(1, 2)	12	1	3
(1, 3)	8	2	4
(1, 4)	4	3	5
(2, 2)	3	0	4
(2, 3)	6	1	5
(2, 4)	3	2	6
(3, 3)	1	0	6
(3, 4)	2	1	7

Tableau de contingence :

Y / X	2	3	4	5	6	7	Total
0	6		3		1		10
1		12		6		2	20
2			8		3		11
3				4			4
Total	6	12	11	10	4	2	45

2. E(X) = 1,2 ; E(Y) = 4 ; V(X) = 176/225 ; V(Y) = 16/9 ; Cov(X, Y) = 8/15 ; r(X, Y) = $\frac{3}{2\sqrt{11}}$

3. 15x – 22y + 70 = 0

4.

x	0	1	2	3
E(Y/X = x)	3	4	50/11	5

10. Exercice 10

Tableau de contingence :

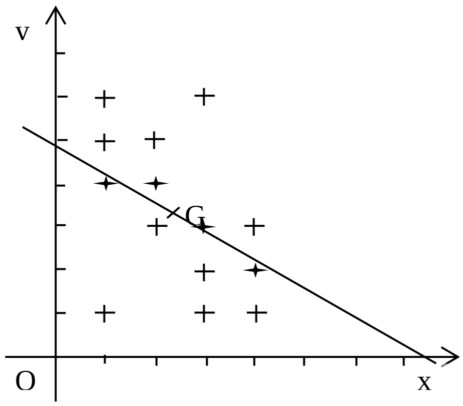
y / x	1	2	3	5	6	Σ
1	1			1	1	3
2			1	1		2
3	1	1			1	3
4	1		1			2
Σ	3	1	2	2	2	10

Tableau des moyennes conditionnelles :

x	1	2	3	4
E(Y/X = x)	4	4	3	2

E(X) = $\frac{12}{5}$ = 2,4 ; E(Y) = $\frac{33}{10}$ = 3,3 ; $E(X^2)$ = 7 ; V(X) = $\frac{31}{25}$ = 1,24 ; $E(Y^2)$ = $\frac{147}{10}$ = 14,7 ;
V(Y) = $\frac{381}{10}$ = 3,81 ; E(XY) = $\frac{71}{10}$ = 7,1 ; Cov(X,Y) = $\frac{-41}{50}$ = -0,82 ;

équation de la droite de régression de Y en X : $y - 3{,}3 = \frac{-41}{62}(x - 2{,}4)$; $y \approx -0{,}66x + 4{,}89$.



Loi de probabilité conjointe.

Y / X	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
1	1/20			2/20					3/20
2		3/20	2/20			4/20			9/20
3				2/20			1/20		3/20
4				1/20	2/20			2/20	5/20
Total	1/20	3/20	2/20	5/20	2/20	4/20	1/20	2/20	1

$E(XY) = (1 + 8 + 12 + 12 + 48 + 24 + 21 + 16 + 40 + 64) / 20$; $\boxed{E(XY) = 12{,}3}$

Lois de probabilités marginales.

x	1	2	3	4	Total
P(X = x	3/20	9/20	3/20	5/20	1
xP(X = x)	3/20	18/20	9/20	20/20	$\boxed{E(X) = 2{,}5}$
$x^2P(X = x)$	3/20	36/20	27/20	80/20	$E(X^2) = 7{,}3$

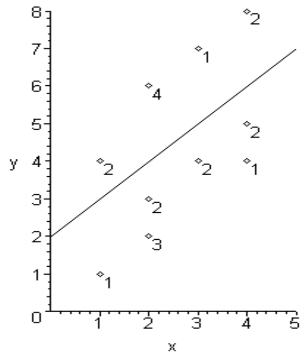
$V(X) = 7{,}3 - (2{,}5)^2 = \boxed{1{,}05}$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
P(Y = y)	1/20	3/20	2/20	5/20	2/20	4/20	1/20	2/20	1
yP(Y = y)	1/20	6/20	6/20	20/20	10/20	24/20	7/20	16/20	$\boxed{E(Y) = 4{,}5}$
$y^2P(Y = y)$	1/20	12/20	18/20	80/20	50/20	144/20	49/20	128/20	$E(Y^2) = 24{,}1$

$V(Y) = 24{,}1 - 4{,}5^2 = \boxed{3{,}85}$

$\text{Cov}(X, Y) = 12{,}3 - (2{,}5 \times 4{,}5) = \boxed{1{,}05}$; $r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \sqrt{\frac{1{,}05}{3{,}85}} = \boxed{\sqrt{3/11} \approx 0{,}5222}$

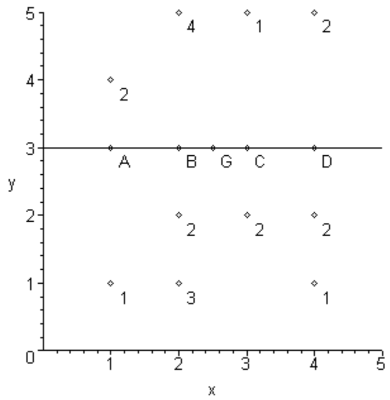
11. **Exercice 11**



1. La droite de régression de Y en X a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{1{,}05}{1{,}05} = 1$

et $b = E(Y) - a.E(X) = 4{,}5 - 2{,}5 = 2$. D'où l'équation : $\boxed{y = x + 2}$.

12. **Exercice 12**



Loi de probabilité conjointe.

Y X	1	2	4	5	Total
1	1/20		2/20		3/20
2	3/20	2/20		4/20	9/20
3		2/20		1/20	3/20
4	1/20	2/20		2/20	5/20
Total	5/20	6/20	2/20	7/20	1

E(XY) = (1 + 8 + 6 + 8 + 40 + 12 + 15 + 4 + 16 + 40) / 20; $\boxed{E(XY) = 7{,}5}$

Lois de probabilités marginales.

x	1	2	3	4	Total
P(X = x	3/20	9/20	3/20	5/20	1
xP(X = x)	3/20	18/20	9/20	20/20	$\boxed{E(X) = 2{,}5}$
x^2P(X = x)	3/20	36/20	27/20	80/20	$E(X^2) = 7{,}3$

y	1	2	4	5	Total
P(Y = y)	5/20	6/20	2/20	7/20	1
yP(Y = y)	5/20	12/20	8/20	35/20	$\boxed{E(Y) = 3}$
y^2P(Y = y)	5/20	24/20	32/20	175/20	$E(Y^2) = 11{,}8$

Le point moyen du nuage est le point $\boxed{G(2{,}5 ; 3)}$.

V(X) = 7,3 – 6,25 ; $\boxed{V(X) = 1{,}05}$ V(Y) = 11,8 – 9 ; $\boxed{V(Y) = 2{,}8}$

Corrélation linéaire.

Cov (X, Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = 7,5 – 2,5 × 3 ; $\boxed{Cov (X, Y) = 0}$ donc aussi : $\boxed{r(X, Y) = 0}$.
Il n’y a aucune corrélation linéaire dans le couple (X, Y).
Cependant le tableau des probabilités conjointes prouve que $\boxed{\text{X et Y ne sont pas indépendantes}}$.
Par exemple : P(X = 1 et Y = 1) ≠ P(X = 1) × P(Y = 1).

Equation de la droite de régression de Y en X :
y = ax + b avec a = Cov(X, Y) / V(X) = 0 et b = E(Y) – aE(X) = E(Y) = 3. Donc : $\boxed{y = 3}$.

Lois de probabilités conditionnelles.

X = 1

y	1	4	Total
P(Y = Y/X = 1)	1/3	2/3	1
yP(Y = Y/X = 1)	1/3	8/3	$\boxed{E(Y/X = 1) = 3}$
y^2P(Y = Y/X = 1)	1/3	32/3	$E(Y^2 / X = 1) = 11$

V(Y/X = 1) = 11 – 9 = 2

X = 2

y	1	2	5	Total
P(Y = Y/X = 2)	3/9	2/9	4/9	1

$yP(Y = Y/X = 2)$	3/9	4/9	20/9	$E(Y/X = 2) = 3$
$y^2P(Y = Y/X = 2)$	3/9	8/9	100/9	$E(Y^2 / X = 2) = 37/3$

$V(Y/X = 2) = 37/3 - 9 = 10/3$

X = 3

y	2	5	Total
$P(Y = Y/X = 3)$	2/3	1/3	1
$yP(Y = Y/X = 3)$	4/3	5/3	$E(Y/X = 3) = 3$
$y^2P(Y = Y/X = 3)$	8/3	25/3	$E(Y^2 / X = 3) = 11$

$V(Y/X = 3) = 11 - 9 = 2$

X = 4

y	1	2	5	Total
$P(Y = Y/X = 4)$	1/5	2/5	2/5	1
$yP(Y = Y/X = 4)$	1/5	4/5	10/5	$E(Y/X = 4) = 3$
$y^2P(Y = Y/X = 4)$	1/5	8/5	50/5	$E(Y^2 / X = 4) = 59/5$

$V(Y/X = 4) = 59/5 - 9 = 14/5$

La variable aléatoire E(Y / X) est constante et égale à 3. Sa variance est donc nulle : $\boxed{V(E(Y / X)) = 0}$.

Le nuage de régression de Y en X est constitué des points $\boxed{A(1, 3), B(2, 3), C(3, 3) \text{ et } D(4, 3)}$.
Ils sont alignés (sur la droite de régression de Y en X). La régression de Y en X est linéaire.

Etude de la variable aléatoire V(Y / X).

x	1	2	3	4	
V(Y/X = x)	2	10/3	2	14/5	Total
P(X = x)	3/20	9/20	3/20	5/20	1
V(Y/X = x).P(X = x)	3/10	15/10	3/10	7/10	E(V(Y / X)) = 2,8

On a bien : E(V(Y / X)) + V(E(Y / X)) = V(Y).

13. Exercice 13

Cov(4X – Y + 2,3X + 2Y – 6) = -1 ; Var(-3X + 4Y – 3) = 170.

14. Exercice 14

Var(X) = 3 ; Var(Y) = 2 ; Cov(X, Y) = 1 ;Var(X + 2Y – 8) = 15 ; Cov(2X + 3Y + 5, -3X + 2Y + 1) = -11.

TD02- VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES : COUPLES, VECTEURS ET INDEPENDANCE - CORRECTION

1. Exercice 15

Si $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ 3 < y < 8 \end{cases}$ alors $f_{X,Y}(x, y) = 1/15$; sinon $f_{X,Y}(x, y) = 0$; si $-2 < x < 1$ alors $f_X(x) = 1/3$; sinon $f_X(x) = 0$;

si $3 < y < 8$ alors $f_Y(y) = 1/5$; sinon $f_Y(y) = 0$; X et Y sont indépendantes.

2. Exercice 16

1) $3x - 4y + 6 = 0$ 2) Aire : 6 ; $f_{X,Y}(x, y) = 1/6$ si $-2 < x < 2$ et $0 < y < \frac{3}{4}(x + 2)$; $f_{X,Y}(x, y) = 0$ sinon.

3) $f_X(x) = \frac{1}{8}(x + 2)$ si $-2 < x < 2$; $f_X(x) = 0$ sinon. $f_Y(y) = \frac{2}{9}(3 - y)$ si $0 < y < 3$; $f_Y(y) = 0$ sinon.

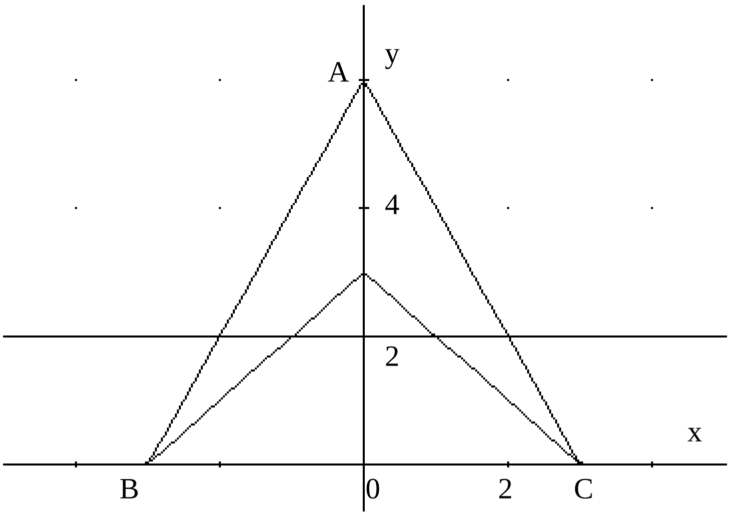
$F_X(x) = 0$ si $x \le -2$; $F_X(x) = \left(\frac{x+2}{4}\right)^2$ si $-2 < x \le 2$; $F_X(x) = 1$ si $x > 2$.

4) $E(X) = (-2 + 2 + 2) / 3 = 2/3$; $E(Y) = (0 + 0 + 3) / 3 = 1$ 5) $Var(X) = 8/9$; $Var(Y) = 1/2$

6) $Y \mid X = x$ est uniforme sur $[0 ; \frac{3}{4}(x + 2)]$; $E(Y \mid X = x) = \frac{3}{8}(x + 2)$

7) $Cov(X, Y) = 1/3$; équation : $y = E(Y \mid X = x)$ c'est à dire : $3x - 8y + 6 = 0$.

3. Exercice 17



(AB) a pour équation : $y = 2x + 6$; (AC) a pour équation : $y = -2x + 6$; ABC a pour aire 18 u.a. ;
$f_{X,Y}(x, y) = 1/18$ si : $-3 < x < 3$ et $0 < y < -2|x| + 6$; $f_{X,Y}(x, y) = 0$ sinon ;

	$x \le -3$	$-3 < x \le 0$	$0 < x \le 3$	$3 < x$
$f_X(x)$	0	$\frac{x+3}{9}$	$\frac{-x+3}{9}$	0

	$y \le 0$	$0 < y \le 6$	$6 < y$
$f_Y(y)$	0	$\frac{-y+6}{18}$	0

$E(X) = 0$; $E(Y) = 2$; $Var(X,Y) = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; la droite de régression de Y en X a pour équation : $y = 2$.

$E(Y/X = x) = -|x| + 3$ $(-3 < x < 3)$.

4. Exercice 18

1. (AB) : $x + y = 1$; (AC) : $x + 2y = 1$.

2. b) $\dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(X)} = -1/2$.

3. $f_{X,Y}(x, y) = 2$ si $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 - x \end{cases}$; $f_{X,Y}(x, y) = 0$ sinon.

4. $f_X(x) = 2(1 - x)$ si $0 < x < 1$; $f_X(x) = 0$ sinon. $E(X) = \int_0^1 x2(1-x)dx = 1/3$;

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 2(1-x)dx = 1/6$; $V(X) = 1/18$; $\mathrm{Cov}(X, Y) = (-1/2) \times (1/18) = -1/36$.

5. a) Le triangle OAB ne change pas si l'on échange x et y. **b)** Point moyen : G(1/3, 1/3) ; r(X, Y) = -1/2.

5. **Exercice 19**

1. b) 9 c) (AB) : $x - 2y + 5 = 0$; (BC) : $2x + 5y + 1 = 0$; (CA) : $4x + y - 7 = 0$.

2. a) $f_{X,Y}(x, y) = 1/9$ à l'intérieur du triangle ABC, 0 à l'extérieur.

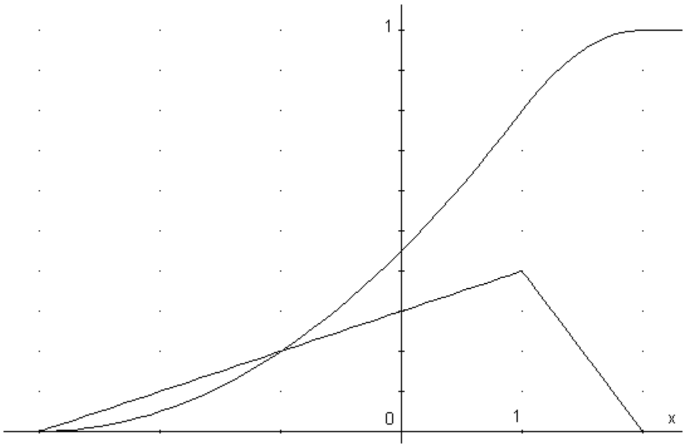
b)

x	-3	1	2	
$f_X(x)$	0	$\frac{1}{10}(x + 3)$	$\frac{2}{5}(-x + 2)$	0

c)

x	-3	1	2	
$F_X(x)$	0	$\frac{1}{20}(x + 3)^2$	$\frac{1}{5}(-x^2 + 4x + 1)$	1

d)



e)

y	-1	1	3	
$f_Y(y)$	0	$\frac{1}{4}(y + 1)$	$\frac{1}{4}(-y + 3)$	0

f) $E(X) = 0$; $E(Y) = 1$. G est le centre de gravité du triangle ABC. $E(X) = (x_A + x_B + x_C) / 3$; $E(Y) = (y_A + y_B + y_C) / 3$.

3. Si $-3 < x \le 1$ alors $[Y/X = x]$ est uniforme sur $[\frac{-(2x + 1)}{5} ; \frac{(x + 5)}{2}]$.

$f_{Y/X = x}(y) = \frac{10}{9(x + 3)}$ si $y \in [\frac{-(2x + 1)}{5} ; \frac{(x + 5)}{2}]$. $f_{Y/X = x}(y) = 0$ sinon.

Si $1 < x < 2$ alors $[Y/X = x]$ est uniforme sur $[\frac{-(2x + 1)}{5} ; -4x + 7]$.

$f_{Y/X = x}(y) = \frac{5}{18(-x + 2)}$ si $y \in [\frac{-(2x + 1)}{5} ; -4x + 7]$. $f_{Y/X = x}(y) = 0$ sinon.

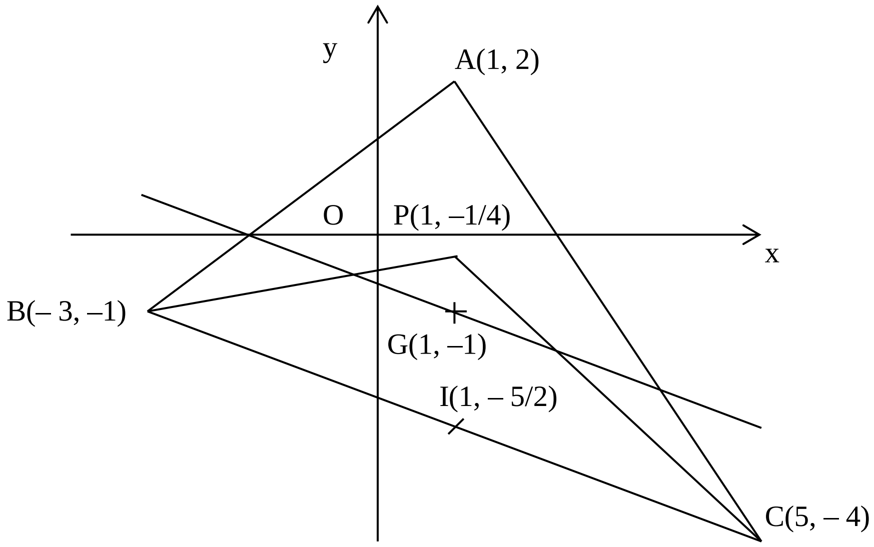
x	-3 1	2
E (Y/X = x)	$\frac{x + 23}{20}$	$\frac{-11x + 17}{5}$
V (Y/X = x)	$\frac{27 (x + 3)^2}{400}$	$\frac{27 (x - 2)^2}{25}$

4 $V(Y) = \frac{2}{3}$; $E [V (Y / X)] = \frac{27}{50}$; $V [E (Y / X)] = \frac{19}{150}$.

5 $V(X) = \frac{7}{6}$; $Cov (X, Y) = \frac{-1}{6}$; équation de D : $x + 7y - 7 = 0$; $r(X, Y) = \frac{-1}{2\sqrt{7}} \approx -0{,}1890$.

6. **Exercice 20**

1.



2. $E(X) = (1 - 3 + 5) / 3 = \boxed{1}$; $E(Y) = (2 - 1 - 4) / 3 = \boxed{-1}$.

3. La courbe de régression de Y en X est la droite des milieux.

C'est ligne brisée $[B, P] \cup [P, C]$ avec P milieu de [A, I]. $\boxed{P(1, -1/4)}$.

4. La courbe de régression de Y en X est constituée de deux segments de droites [B, P] et [P, C].

Equation de (BP) : $\boxed{3x - 16y - 7 = 0}$; équation de (PC) : $\boxed{15x + 16y - 11 = 0}$.

5. Aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}$ Abs(Dét $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$) $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = \boxed{18}$.

6. Equation de chacune des droites (AB), (BC) et (CA) :

(AB)	(BC)	(AC)
$3x - 4y + 5 = 0$	$3x + 8y + 17 = 0$	$3x + 2y - 7 = 0$

7. **a)** $\boxed{f_{X,Y}(x, y) = 1/18}$ à l'intérieur du triangle c'est-à-dire pour $\begin{cases} 3x - 4y + 5 > 0 \\ 3x + 8y + 17 > 0 \\ 3x + 2y - 7 < 0 \end{cases}$; $f_{X,Y}(x, y) = 0$ ailleurs.

b) Pour $x < -3$ ou pour $x \geq 5$ $f_X(x) = 0$.

Pour $-3 \leq x < 1$ $f_X(x) = \int_{\frac{-3x-17}{8}}^{\frac{3x+5}{4}} \frac{dy}{18} = \frac{1}{18}\left(\frac{3x+5}{4} - \frac{-3x-17}{8}\right) = \boxed{\frac{x+3}{16}}$.

Pour $1 \leq x < 5$ $f_X(x) = \int_{\frac{-3x-17}{8}}^{\frac{-3x+7}{2}} \frac{dy}{18} = \frac{1}{18}\left(\frac{-3x+7}{2} - \frac{-3x-17}{8}\right) = \boxed{\frac{-x+5}{16}}$.

8. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{16}\left(\int_{-3}^{1} x^2(x+3)dx + \int_{1}^{5} x^2(-x+5)dx\right) = \frac{11}{3}$. $V(X) = \frac{11}{3} - 1 = \boxed{\frac{8}{3}}$.

$E(X.Y) = E(X.E(Y/X)) = \frac{1}{256}\left(\int_{-3}^{1} x(3x-7)(x+3)dx + \int_{1}^{5} x(-15x+11)(-x+5)dx\right) = -2$.

$Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = -2 + 1 = \boxed{-1}$ Equation de la droite de régression de Y en X :

$y = ax + b$ avec : $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{-3}{8}$ et $b = E(Y) - aE(X) = -1 + \frac{3}{8} = \frac{-5}{8}$.

Donc : $y = \frac{-3}{8}x - \frac{5}{8}$ ou encore : $\boxed{3x + 8y + 5 = 0}$.

7. **Exercice 21**

Aire du nuage : $\int_0^1 (1-x^3)dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$. Densité de probabilité à l'intérieur du nuage : $\frac{4}{3}$.

Densité de probabilité marginale de X : f(x) = $\frac{4}{3}(1 - x^3)$ si $0 < x < 1$; f(x) = 0 sinon.

Espérance mathématique de X : $\int_0^1 x\frac{4}{3}(1-x^3)dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$.

Espérance mathématique de X^2 : $\int_0^1 x^2\frac{4}{3}(1-x^3)dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$. Variance de X : V(X) = $\frac{2}{9} - \frac{4}{25} = \frac{14}{225}$.

Courbe de régression de Y en X (lieu des milieux des coupures verticales) : $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y = \frac{1}{2}(1 - x^3) \end{cases}$.

$E(Y) = E[E(Y / X)] = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^3)\frac{4}{3}(1-x^3)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 1)dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x\right]_0^1 = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$.

Le point moyen du nuage est le point G $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right)$.

$E(XY) = E[X.E(Y / X)] = \int_0^1 x\frac{1}{2}(1-x^3)\frac{4}{3}(1-x^3)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^7 - 2x^4 + x)dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^8}{8} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{20}$.

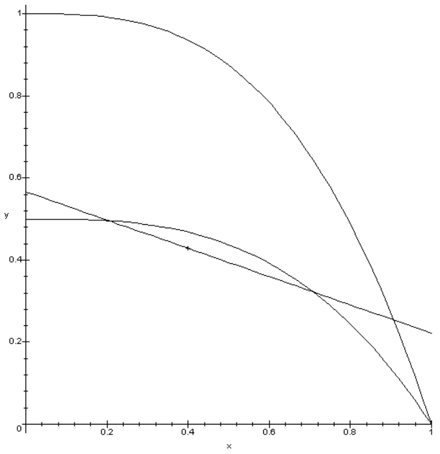
Covariance de (X, Y) : Cov(X, Y) = $\frac{3}{20} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{-3}{140}$.

Equation de la droite de régression de Y en X :

$y - \frac{3}{7} = \frac{-3}{140} / \frac{14}{225} \times \left(x - \frac{2}{5}\right)$;

135 x + 392 y – 222 = 0 ;

$y = \frac{-135}{392}x + \frac{111}{196}$; $y \approx -0{,}34\,x + 0{,}57$.



8. Exercice 22

1. b) 2/3 c) $f_{X,\,Y}(x, y) = 3/2$ si $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$, 0 sinon.

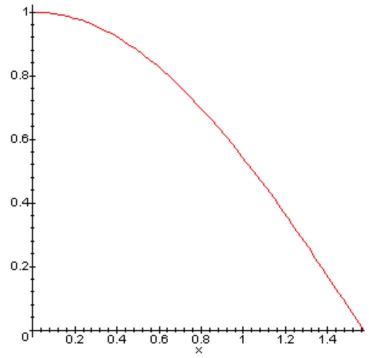
2) $f_X(x) = (3/2)(1 - x^2)$ si $0 < x < 1$, 0 sinon ; $F_X(x) = (x/2)(3 - x^2)$ si $0 < x < 1$, 0 sinon. 3) 3/8 4) 19/320

5) a) $f_{Y \mid X = x}(y) = 1 / (1 - x^2)$ si $0 < y < 1 - x^2$, 0 sinon (loi uniforme sur $[0 ; 1 - x^2]$). b) $E(Y \mid X = x) = (1 - x^2) / 2$.

7) a) 2/5 b) -1/40 c) $y = -(8/19)x + 53/95 \approx -0{,}42x + 0{,}56$.

9. Exercice 23

1.Ci-contre



2. $a = 1$; $f_{X,\,Y}(x, y) = 1$ si $\begin{cases} 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 \le y \le \cos x \end{cases}$; $f_{X,\,Y}(x, y) = 0$ sinon.

3. $f_X(x) = \cos x$ si $0 < x < \pi/2$; $f_X(x) = 0$ sinon.

4. $F_X(x) = 0$ si $x \le 0$; $F_X(x) = \sin x$ si $0 < x < \pi/2$; $F_X(x) = 1$ si $x \ge \pi/2$.

5. Pour $0 < x < \pi/2$, $Y/X = x$ est uniforme sur $[0 ; \cos x]$.

6. $\mathcal{C} = \{ (x, y) \in R^2 / \begin{cases} 0 \le x \le \pi/2 \\ y = \cos x / 2 \end{cases} \}$.

7. $E(X) = \pi/2 - 1$; $E(Y) = E[E(Y / X)] = \pi/8$.

8. $\text{Var}(X) = \pi - 3$; $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, E(Y / X)) = \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{\pi - 2}{4}\right)^2$;

$\mathcal{D} = \{ (x, y) \in R^2 / y = \dfrac{-1}{2(\pi - 3)}\left(\dfrac{\pi - 2}{4}\right)^2 x + \dfrac{\pi^3 + 2\pi^2 - 12\pi - 8}{64(\pi - 3)} \}$; $y \approx -0{,}2876$ $x + 0{,}5569$.

10. Exercice 24

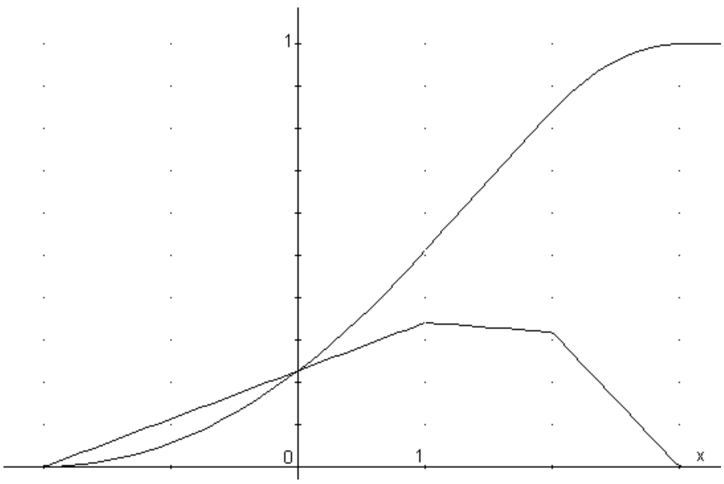
1) Aire de ABCD : 11 unités d'aire. $f_{X,\,Y}(x, y) = 1/11$ à l'intérieur de ABCD ; $f_{X,\,Y}(x, y) = 0$ à l'extérieur de ABCD.

Droite	Equation du type ax + by + c = 0	Equation du type y = ax + b	Equation du type x = ay + b
(AB)	3x + y – 8 = 0	y = -3x + 8	x = (8 – y) / 3
(BC)	x – 4y + 6 = 0	y = x/4 + 3/2	x = 4y – 6
(CD)	x + y + 1 = 0	y = -x – 1	x = -y – 1
(DA)	x – 2y – 5 = 0	y = (x – 5) / 2	x = 2y + 5

2)

	$y \le -2$	$-2 < y \le -1$	$-1 < y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y$
$f_Y(y)$	0	3(y + 2) / 11	(2y + 11) / 33	13(2 – y) / 33	0

	$x \le -2$	$-2 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x$
$f_X(x)$	0	5(x + 2) / 44	(16 – x) / 44	(3 – x) / 44	0
$F_X(x)$	0	$5(x + 2)^2 / 88$	$(-x^2 + 32x + 14) / 88$	$(-7x^2 + 42x - 19) / 44$	1
$f_{Y \mid X = x}(y)$		uniforme sur [x – 1 ; x/4 + 3/2] $\frac{4}{5(x+2)}$	uniforme sur [(x – 5)/2 ; x/4 + 3/2] $\frac{4}{16-x}$	uniforme sur [(x – 5) / 2 ; 8 – 3x] $\frac{2}{7(3-x)}$	
E(Y | X = x)		(2 – 3x) / 8	(3x – 4) / 8	(11 – 5x) / 4	



11. Exercice 25

1. f est acceptable comme densité de probabilité parce qu'elle est à valeurs positives ou nulles et que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ est égale à 1.

2. Les variables aléatoires X et Y sont identiquement distribuées parce que la densité de probabilité conjointe f du couple (X, Y) est symétrique en x et y.

3. a) Si 0 < x < 1 alors $f_X(x) = \int_0^1 (x + y)dy = \left[xy + y^2/2\right]_0^1 = x + 1/2$. Sinon, $f_X(x) = 0$.

b) $E(X) = \int_0^1 x(x+1/2)dx = \left[x^3/3 + x^2/4\right]_0^1 = 7/12$. **c)** $E(X^2) = \int_0^1 x^2(x+1/2)dx = \left[x^4/4 + x^3/6\right]_0^1 = 5/12$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5/12 - 49/144 = 11/144$.

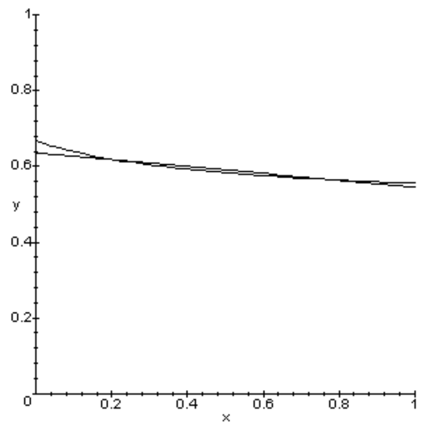
4. a) $f_{Y/X=x}(y) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$. Si 0 < y < 1 alors $f_{Y/X=x}(y) = \dfrac{x+y}{x+1/2}$. Sinon, $f_{Y/X=x}(y) = 0$.

b) $E(Y/X = x) = \int_0^1 y\dfrac{x+y}{x+1/2}dy = \dfrac{1}{x+1/2}\left[xy^2/2+y^3/3\right]_0^1 = \dfrac{x/2+1/3}{x+1/2} = \dfrac{3x+2}{3(2x+1)}$.

c) $E(Y^2 / X = x) = \int_0^1 y^2\dfrac{x+y}{x+1/2}dy = \dfrac{1}{x+1/2}\left[xy^3/3+y^4/4\right]_0^1 = \dfrac{x/3+1/4}{x+1/2} = \dfrac{4x+3}{6(2x+1)}$.

$V(Y/X = x) = E(Y^2 / X = x) - [E(Y/X = x)]^2 = \dfrac{3(4x+3)(2x+1)-2(3x+2)^2}{18(2x+1)^2} = \dfrac{6x^2+6x+1}{18(2x+1)^2}$.

5.



6. **a)** $E(XY) = E[X.E(Y / X)] = \int_0^1 x.E(Y / X = x).f_X(x)dx = \int_0^1 \dfrac{x(3x+2)}{6}dx = \dfrac{1}{6}\left[x^3+x^2\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = E(XY) - [E(X)]^2 = 1/3 - 49/144 = -1/144$.

b) La droite $\mathcal{D}$ de régression de Y en X a pour équation : y = ax + b avec $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} = -1/11$

et b = E(Y) – aE(X) = (1 + 1/11) E(X) = 7/11, c'est à dire : y = -x/11 + 7/11 ou encore : x + 11y – 7 = 0.

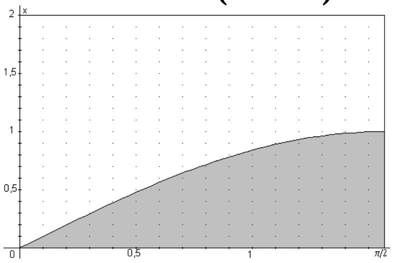
12. Exercice 26

$f_1(x_1) = \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$; $f_2(x_2) = \dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$; X_1 et X_2 sont indépendantes. (Le couple (X_1, X_2) est gaussien.)

13. Exercice 27

f est bien une densité de probabilité ; $f_1(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x_1^2}{2}}$; $f_2(x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x_2^2}{2}}$; X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes ; elles sont non linéairement corrélées. (X_1 et X_2 sont gaussiennes mais le couple (X_1, X_2) n'est pas gaussien.)

14. **Exercice 28 (Buffon)**



2) $P = \dfrac{4S}{\pi L}$ 3) a) $x = \dfrac{\ell}{2} \sin \alpha$ 4) b) $S = \int_0^{\pi/2} \dfrac{l}{2} \sin \alpha . d\alpha = \dfrac{\ell}{2}$ 5) $P = \dfrac{S}{\pi L} = \dfrac{2\ell}{\pi L}$

TD03- VECTEURS GAUSSIENS– CORRECTION

1. Exercice 1

Exercice 1. 1) Puisque X et Y sont centrés, les données de l'énoncé entraînent que $\mathrm{Var}(X) = 4$ et que $\mathrm{Var}(Y) = 1$. Il reste à déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Puisque les v.a. $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes, leur covariance est nulle. Donc

$$0 = \mathrm{Cov}(2X + Y, X - 3Y) = 2\mathrm{Var}(X) - 3\mathrm{Var}(Y) - 5\mathrm{Cov}(X, Y),$$

ce qui donne $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$ et

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Toute combinaison linéaire de $X + Y$ et $2X - Y$ est aussi une combinaison linéaire de X et Y, donc c'est une gaussienne, puisque le vecteur (X, Y) est gaussien. On peut aussi dire que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est gaussien puisqu'il est l'image par une application linéaire du vecteur gaussien (X, Y). En effet

$$\begin{pmatrix} X + Y \\ 2X - Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir sa matrice de covariance, on calcule successivement

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 4 + 1 + 2 = 7,$$

$$\mathrm{Var}(2X - Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 4\mathrm{Cov}(X, Y) = 16 + 1 - 4 = 13$$

et

$$\mathrm{Cov}(X + Y, 2X - Y) = 2\mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Cov}(X, Y) = 8 - 1 + 1 = 8.$$

On a donc

$$K_{(X+Y,2X-Y)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut aussi écrire $K_{(X+Y,2X-Y)} = A\, K_{(X,Y)}\, {}^tA$ et effectuer le produit de matrices.

2. Exercice 2

1. Puisque $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = 2$, on a $(X_1 - X_2)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $(X_1 + X_2)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On a aussi $\mathbb{E}((X_1 - X_2)(X_1 + X_2)) = \mathbb{E}(X_1^2 - X_2^2) = 0$, ainsi $\mathrm{Cov}\,((X_1 - X_2), (X_1 + X_2)) = \mathbb{E}((X_1 - X_2)(X_1 + X_2)) - \mathbb{E}(X_1 - X_2)\mathbb{E}(X_1 + X_2) = 0$. Comme il s'agit de variable aléatoire gaussienne et la covariance est nulle, donc $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ sont indépendantes.

D'après la définition de la loi du $\chi^2(n)$, $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^2/2 \sim \chi^2(2)$.

3. Exercice 3

Soient $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ et T une variable aléatoire indépendante de X telle que P(T=1)=P(T=-1)= ½.

1. Y=TX suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$

$FY(u) = P(TX < u) = P(-1 \times X < u/T = -1) \times P(T = -1) + \ P(1 \times X < u/T = -1) \times P(T = 1)$

$= 1/2\ (P(X > -u) + P(X < u))$ (par indépendance entre T et X)

$= 1/2(1 - FX(-u) + FX(u)) = 1/2(1 - FX(u) + \ FX(u)) = FX(u)$

2. $P(X + Y = 0) \neq 0,$

P (X +Y = 0) = P(X(1+T)=0)=P(T=-1)=1/2

Conclusion : le vecteur aléatoire (X,Y) n'est pas un vecteur gaussien.

4. **Exercice 4**

1. Calculer la matrice de covariance du vecteur (Z, Q).

   On a $\begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Donc c'est un V.G de matrice de covariance

   $$\Gamma_{\begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix}} = AI_2A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Ceci implique en particulier que $Q \sim \mathcal{N}(0; \frac{1}{2})$ et $Z \perp Q$.

2. Calculer $E[U]$ et $Var[U]$.

   On a $U = Q^2$; donc $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[Q^2] = var(Q) = \frac{1}{2}$ et $var(U) = \mathbb{E}[Q^4] - \mathbb{E}[Q^2]^2$.

   Or d'après la question 3. du premier exercice, on a $\mathbb{E}[Q^4] = (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 \mathbb{E}[N^4] = \frac{3}{4}$ $(N = \sqrt{2}Q \sim \mathcal{N}(0; 1))$. Ainsi $var(U) = \frac{3}{4} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

3. Montrer que les v.a. Z et U sont indépendantes.

   On a $U = Q^2$ et $Z \perp Q$ alors $Z \perp U$

5. **Exercice 5**

1) Il suffit de lire la matrice de covariance. On a alors $\mathrm{Var}\{X_1\} = 3$ et $\mathrm{Cov}\{X_1, X_2\} = \mathbb{E}\left[((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right] = \rho\sqrt{3}$.

2) X_1, X_2 indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}\{X_1, X_2\} = 0$ car le vecteur X est gaussien. Il ya donc indépendance si et seulement si $\rho = 0$ (coefficient de corrélation).

3) $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2) = 0$. On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{Y_1, Y_2\} &= \mathbb{E}[Y_1 Y_2] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1}{\sqrt{3}} - X_2\right)\left(\frac{X_1}{\sqrt{3}} + X_2\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_1^2] + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbb{E}[X_1 X_2] - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_2^2] \\
&= \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_2^2] = 1 - 1 = 0 \\
&\quad \text{[Car } \mathbb{E}[X_1^2] = \mathrm{Var}\{X_1\} \text{ puisque } \mathbb{E}[X_1] = 0\,;\text{ idem pour } X_2\text{].}
\end{aligned}$$

On calcule maintenant les variances de Y_1 et de Y_2. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{Y_1\} &= \mathbb{E}[Y_1^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1}{\sqrt{3}} - X_2\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{X_1^2}{3} + X_2^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} X_1 X_2\right] \\
&= 1 + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\rho\sqrt{3} = 2(1-\rho)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{Y_2\} &= \mathbb{E}[Y_2^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1}{\sqrt{3}} + X_2\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{X_1^2}{3} + X_2^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} X_1 X_2\right] \\
&= 1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\rho\sqrt{3} = 2(1+\rho)
\end{aligned}$$

On peut aussi procéder plus rapidement comme suit. On a $Y = AX$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1 \\ 1/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Comme X est un vecteur aléatoire de loi gaussienne, la transformée linéaire $Y = AX$ est aussi un vecteur aléatoire gaussien. On a alors $Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[Y], \mathrm{K}_Y)$ où K_Y est la matrice de covariance de Y. On a $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[AX] = A\mathbb{E}[X] = 0$ puisque $\mathbb{E}[X] = 0$. La matrice de covariance de Y est :

$$\begin{aligned}
K_Y &= \mathbb{E}[YY^T] = A\mathbb{E}[XX^T]A^T \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1 \\ 1/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1 \\ 1/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}(1-\rho) & \sqrt{3}(1+\rho) \\ \rho-1 & \rho+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(1-\rho) & 0 \\ 0 & 2(1+\rho) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi tous les résultats précédents.

4) Le vecteur aléatoire Y est obtenu par transformation linéaire du vecteur aléatoire gaussien X. Le vecteur aléatoire Y est donc lui-même gaussien. L'indépendance de ses composantes équivaut donc à la décorrélation de celles-ci. Comme $\mathrm{Cov}\{Y_1, Y_2\} = 0$, la matrice de covariance de Y est diagonale. Il s'ensuit que ses composantes Y_1 et Y_2 sont décorrélées et donc indépendantes.

6. **Exerice 6**

Det (Σ)=1/2 – 1 =-1/2

$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

$$f_{X,Y}(x,y) == \frac{1}{\pi(2)^{1/2}} \exp(-((\mathrm{x}-1)^2 - \sqrt{2}(\mathrm{x}-1)(\mathrm{y}-2) + (\mathrm{y}-2)^2))$$

TD04- CONVERGENCE ET THEOREME LIMITES - CORRECTION

1. Exercice 1

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit

$$\mathbb{P}(|X-m|>\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

En choisissant $\varepsilon = 2\sigma$, on obtient

$$\mathbb{P}(|X-m|>2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = \frac{1}{4}.$$

Finalement, la probabilité que la v.a. X appartienne à l'intervalle $[m-2\sigma; m+2\sigma]$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in [m-2\sigma; m+2\sigma]) &= \mathbb{P}(|X-m| \leq 2\sigma] \\
&= 1 - \mathbb{P}(|X-m| > 2\sigma] \\
&\geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans au moins 75% des cas, la v.a. X admet des valeurs dans l'intervalle $[m-2\sigma; m+2\sigma]$.

2. Soit Φ la fonction de répartition d'une v.a. N distribuée selon la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in [m-2\sigma; m+2\sigma]) &= \mathbb{P}\left(\frac{|X-m|}{\sigma} \leq 2\right) \\
&= \mathbb{P}(|N| \leq 2) \\
&= \mathbb{P}(-2 \leq N \leq 2) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1-\Phi(2)) \\
&= 2\Phi(2) - 1 \\
&\approx 95.45\%.
\end{aligned}$$

Ainsi, avec l'hypothèse de la loi normale, on obtient que la probabilité que la v.a. X prenne une valeur dans l'intervalle $[m-2\sigma; m+2\sigma]$ est d'environ 95.45%.

3. On note que ces deux valeurs sont très éloignées l'une de l'autre. En fait, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne une borne inférieure de la probabilité de l'évènement $X \in [m-2\sigma; m+2\sigma]$, tandis que via la fonction de répartition de X, on obtient une approximation de cette même probabilité. Notons tout de même que l'inégalité est toujours vérifiée, autrement dit ne dépend pas de la distribution de X, alors que le passage par la fonction de répartition nécessite le choix d'une hypothèse forte.

2. Exercice 2

1. Les v.a. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ forment un échantillon de taille n. Elles sont donc supposées (par définition) indépendantes et identiquement distribuées.
2. (a) On a

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = m.$$

On dit alors que cet estimateur est sans biais.

(b) On a

$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Comme la quantité $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) = 0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$\overline{X}_n \to m, \qquad \text{en probabilité.}$$

(d) Ce résultat est connu sous le nom de loi faible des grands nombres.

3. Une estimation ponctuelle de m est $\overline{x}_n = \frac{852}{12} = 71\ kg$.

3. Exercice 3

1. $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de μ. Par ailleurs, il converge en probabilité vers μ.
2. On sait que si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ est un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m;\sigma)$, alors
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(nm; \sqrt{n}\sigma),$$
et par conséquent
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$
3. On déduit de la question précédente que
$$\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1).$$
4. Pour $\alpha = 0.05$, l'équation s'écrit
$$\mathbb{P}(|Z| \leq c_{0.95}) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 2\Phi(c_{0.95}) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(c_{0.95}) = 0.975,$$
où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On obtient finalement à partir d'une table que $c_{0.95} = 1.96$.
5. On a
$$\mathbb{P}\left(|\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)| \leq c_{0.95}\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(|Z| \leq c_{0.95}) = 0.95.$$
On en déduit que $c_{0.95} = 1.96$.
6. On obtient
$$\left[\overline{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \ni \mu$$
avec une probabilité de 95%. Dans le cas où $\overline{x}_n = 3.6\ kg$, avec $n = 40$ et $\sigma = 0.5$, on obtient l'intervalle de confiance $[3.445; 3.755]$.

4. Exercice 5

1. Clairement, on obtient
$$\mathbb{E}[X_1] = \mu \qquad \mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu,$$
et
$$\mathbb{E}\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right] = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}[X_i] = \mu\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i = \mu.$$
Ainsi, les trois estimateurs proposés sont tous des estimateurs sans biais du paramètre μ.

2. On a clairement

$$\mathbb{V}[X_1] = \sigma^2 \qquad \mathbb{V}[\overline{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n},$$

et

$$\mathbb{V}\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right] = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2.$$

3. Puisque les trois estimateurs sont sans biais, il convient maintenant de choisir un estimateur qui soit convergent. Or, un estimateur est convergent si et seulement si sa variance tend vers 0. Clairement, le premier estimateur ne possède pas cette propriété. Par contre les deux autres estimateurs possèdent cette propriété. Comment alors choisir entre les deux ? Il suffit de remarquer que l'on a l'inégalité suivante :

$$\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} > \frac{1}{n},$$

laquelle indique que l'estimateur $\overline{X}_n$ possède une dispersion plus faible que l'autre estimateur. Cela entraîne une meilleur précision de l'estimation. On va donc conserver comme estimateur la moyenne empirique.

5. Exercice 5

1. Soit la v.a. X_i $(1 \leq i \leq n)$ donnant le nombre de points obtenus au i-ème lancer. Clairement, cette v.a. est à valeurs dans $\{1, 2, \cdots, 6\}$. Comme par hypothèse le dé est équilibré, on obtient $X_i \sim \mathcal{U}[1, 6]$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la v.a. représentant le nombre de points obtenus au cours des n lancers. Clairement, on obtient pour $n = 100$

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n\frac{6+1}{2} = 350,$$

puisque

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{6+1}{2} = 3.5.$$

Par ailleurs, on a

$$\mathbb{V}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i] = n\frac{6^2-1}{12} \approx 291.67,$$

puisque

$$\mathbb{V}[X_i] = \frac{6^2-1}{12} \approx 2.9167.$$

2. D'après le Thèorème de la Limite Centrale (TCL), on a

$$\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}S_n - m}{\sigma} \to \mathcal{N}(0;1).$$

Dans le cas présent, on cherche la probabilité

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(300 \leq S_n \leq 400) &= \mathbb{P}(3 \leq \frac{1}{n}S_n \leq 4)\\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{3-m}{\sigma} \leq \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}S_n - m}{\sigma} \leq \sqrt{n}\frac{4-m}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

Or, on a $m = 3.5$ et $\sigma = 1,7078$. Ainsi, on obtient

$$\sqrt{n}\frac{3-m}{\sigma} = -2.928 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}\frac{4-m}{\sigma} = 2.928.$$

A partir du TCL, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(300 \leq S_n \leq 400) &\approx \mathbb{P}(|N| \leq 2.928) \\
&= \Phi(2.928) - (1 - \Phi(2.928)) \\
&= 2\Phi(2.928) - 1 \\
&= 2 \times 0.9983 - 1 \\
&\approx 99.66\%.
\end{aligned}$$

6. **Exercice 1**

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(1; \sigma^2)$, et on pose

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2.$$

1. On a
$$\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i-1)^2 = \sigma^2.$$
Ainsi, l'estimateur S_n^2 est un estimateur sans biais de la variance.
2. Clairement, on a
$$\frac{X_i-1}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1).$$
3. Du fait de l'indépendance des v.a., on obtient alors
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-1}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2.$$
4. On suppose que $Z \sim \chi_{20}^2$. Ainsi, on a
$$\mathbb{P}(\chi^2_{\alpha/2} < Z < \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z < \chi^2_{1-\alpha/2}) - \mathbb{P}(Z < \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha.$$
Ainsi, on a
$$\mathbb{P}(Z < \chi^2_{\alpha/2}) \equiv \mathbb{P}(Z < \chi^2_{0.025}) = 0.025 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \geq \chi^2_{0.025}) = 0.975,$$
qui équivaut à $\chi^2_{0.025} = 9.59$ tandis que
$$\mathbb{P}(Z < \chi^2_{1-\alpha/2}) \equiv \mathbb{P}(Z < \chi^2_{0.975}) = 0.975 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \geq \chi^2_{0.975}) = 0.025,$$
c'est-à-dire $\chi^2_{0.975} = 34.17$.
5. On déduit de la question précédente que
$$\mathbb{P}\left[c_1 < \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-1}{\sigma}\right)^2 < c_2\right] = 0.95$$
équivaut à $c_1 = 9.59$ et $c_2 = 34.17$. Or, $nS_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2$. Ainsi, avec une probabilité de 95%,
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-1}{\sigma}\right)^2 \in [9.59; 34.17],$$
c'est-à-dire
$$\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2} \in [34.17^{-1}; 9.59^{-1}],$$
et donc
$$\left[34.17^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2; 9.59^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right] \ni \sigma^2.$$
Finalement, comme $\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 = nS_n^2 = 20*0.5 = 10$, on a l'intervalle de confiance $[0.2927; 1.0428]$.

7. **Exercice 1**

Comme la taille de l'échantillon est supérieure à 30, on peut approximer (via le TCL) la loi de la v.a.

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{S_n},$$

par une loi $\mathcal{N}(0;1)$. Ainsi, obtenir un intervalle de confiance de niveau 95% revient à trouver une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\left(-c \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{S_n} \leq c\right) = 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}(-c \leq N \leq c) = 0.95.$$

Or, on a

$$\mathbb{P}(-c \leq N \leq c) = 2\Phi(c) - 1.$$

On en déduit que $c = 1.96$. L'intervalle de confiance s'écrit alors

$$\overline{X}_n - S_n\frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X}_n + S_n\frac{1.96}{\sqrt{n}}.$$

L'intervalle s'écrit finalement $165.727 \leq m \leq 170.273$. Ainsi, avec une probabilité de 95%, la taiile moyenne des hommes adultes dans la population d'étude est comprise entre 165.727cm et 170.273cm.

1. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut tout d'abord que la constante k soit strictement positive. Par ailleurs, il faut que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Or, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d = \frac{1}{k}\int_0^a 2xdx = \frac{a^2}{k}.$$

Finalement, pour vérifier la seconde contrainte il faut choisir $k = a^2$.

2. La fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Clairement, pour $x < 0$, on a $F(x) = 0$, tandis que pour $x > a$, on a $F(x) = 1$. Enfin, pour $x \in [0, a]$, on a

$$F(x) = \frac{1}{a^2}\int_0^x 2t dt = \frac{x^2}{a^2}.$$

Finalement, on obtient

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}, & si \quad x \in [0, a], \\ 1, & si \quad x > a. \end{cases}$$

3. On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^a \frac{2x^2}{a^2} dx = \frac{2}{3}a.$$

De même, on a

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \int_0^a \frac{2x^3}{a^2} dx = \frac{1}{2}a^2.$$

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{V}[X] = \frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{a^2}{18}.$$

4. Soit

$$T_n = \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

(a) On a

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^n \frac{2}{3}a = a.$$

T_n est donc un estimateur sans biais de a.

(b) On a

$$\mathbb{V}[T_n] = \frac{9}{4n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i] = \frac{a^2}{8n}.$$

Cet estimateur est par conséquent un estimateur convergent. Cela est justifié par une utilisation de l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev.

(c) On a

$$t_n = \frac{3}{2 \times 10} \times 16.9 = 2.535$$

Ainsi, une estimation ponctuelle de a est $\hat{a} = 2.535$.

8. **Exercice 8**

9. **Exercice 9**

1. Les estimateurs usuels sont respectivement

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}.$$

2. On a

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = m.$$

Par conséquent, $\overline{X}_n$ est bien un estimateur sans biais de m. Par ailleurs, on a

$$\mathbb{V}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Donc, $\overline{X}_n$ est bien un estimateur convergent en probabilité puisque $\mathbb{V}[\overline{X}_n] \to 0$.

3. (a) A partir des données, on obtient $\overline{x}_n = 1107$ tandis que $s_n = 613.89$.

   (b) Etant donné que la v.a. X est distribuée selon une loi $\mathcal{N}(m;\sigma)$, on a

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Ainsi, on obtient que le rapport

$$\frac{\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \sqrt{n-1}\frac{\overline{X}_n - m}{S_n}$$

est distribuée selon une loi de Student de paramètre $n-1$. Finalement, l'intervalle de confiance s'écrit

$$\left[\overline{X}_n - \frac{c\times S_n}{\sqrt{n-1}}; \overline{X}_n + \frac{c\times S_n}{\sqrt{n-1}}\right],$$

où $c > 0$ est une constante qui vérifie l'équation

$$\mathbb{P}(|T_{n-1}| \leq c) = 0.95.$$

avec T_{n-1} une v.a. distribuée selon une loi de Student de paramètre $n-1$. La loi de Student étant symétrique, on obtient que la constante c n'est autre que le fractile d'ordre 0.975. On trouve à partir d'une table que $c = 2.262$ sachant que le paramètre est $n-1 = 9$. Finalement, avec une probabilité de 95%, le paramètre m appartient à l'intervalle $[644; 1570]$.

10. **Exercice 10**

1. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n v.a. i.i.d de loi $B(p)$, définies par

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la réponse est favorable,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. L'estimateur usuel de p est

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

3. On a

$$\mathbb{E}[\hat{p}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = p,$$

par conséquent, $\hat{p}_n$ est un estimateur sans biais de p. Par ailleurs, on a

$$\mathbb{V}[\hat{p}_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}[X_i] = \frac{p(1-p)}{n},$$

équation qui prouve que cet estimateur est aussi convergent.

4. Comme 77 personnes ont répondu favorablement, une estimation du taux de réponses favorables est $\hat{p}_n = 8.02\%$.
5. Pour construire un intervalle de confiance, on fera usage du TCL à partir duquel on déduit l'approximation en loi

$$\sqrt{n}\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}} \sim \mathcal{N}(0;1),$$

dès lors que l'on a $n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n) > 18$.

Or, dans le cas présent, on a $n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n) = 70.82 >> 18$. On peut donc faire usage de l'approximation.

6. L'intervalle de confiance est alors donné par

$$\left[\hat{p}_n - c_{0.95}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}; \hat{p}_n + c_{0.95}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}\right],$$

où $c_{0.95}$ est le fractile d'ordre 0.95 pour la loi normale centrée-réduite. A partir d'une table, on obtient $c_{0.95} = 1.64$, et ainsi avec une probabilité de 90%, la proportion p est contenue dans l'intervalle $[6.58\%; 9.46\%]$.

11. Exercice 11

1. Clairement, la v.a. S_n est distribuée selon une loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 40\%$.
2. (a) On a

$$m_n = \mathbb{E}[S_n] = np = 240.$$

On doit s'attendre à trouver environ 240 individus de groupe sanguin A dans l'échantillon de taille $n = 600$.

(b) Dans le cas présent, on a $np(1-p) = 144 >> 18$. Par conséquent, on peut approximer (via le TCL) la quantité

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

par une loi $\mathcal{N}(0;1)$. En particulier, on obtient qu'avec une probabilité de 95%, la v.a. S_n doit appartenir à l'intervalle

$$\left[np - 1.96\sqrt{np(1-p)}; np + 1.96\sqrt{np(1-p)}\right].$$

Pour $n = 600$ et $p = 40\%$, on obtient l'intervalle $[216; 264]$ au risque 5%.

3. La quantité 276 n'appartient évidemment pas à l'intervalle calculé précédemment. Trois raisons peuvent être invoquées : l'échantillon n'est pas représentatif de la population d'étude, ou la valeur du paramètre p n'est pas 40%, ou bien la valeur observée se situe dans les 5% d'erreur autorisée.

4. Une estimation ponctuelle du paramètre p est obtenue par

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{276}{600} = 46\%.$$

Une estimation ponctuelle de p est donc de 46% d'individus de groupe sanguin A. Pour obtenir un intervalle de confiance, on fait usage d'une approximation similaire à celle réalisée précédemment pour écrire que, avec une probabilité de 95%, le vrai paramètre p appartient à l'intervalle

$$\left[\hat{p}_n - 1.96\frac{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}{\sqrt{n}} ; \hat{p}_n + 1.96\frac{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Comme $\hat{p}_n = 46\%$, on obtient l'intervalle $[0.42; 0.50]$ lequel confirme que la valeur 40% pour p est peu vraisemblable.

5. Dans le cas présent, on suppose que $\hat{p}_n = 0.46$. La précision est donnée par la quantité

$$1.96\frac{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}{\sqrt{n}}.$$

On doit donc résoudre l'équation en n

$$1.96\frac{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}{\sqrt{n}} = 0.02.$$

On obtient ainsi $n = 2386$.

12. Exercice 12

X_n converge vers 0 en convergence quadratique, donc aussi en probabilité et en loi.

13. Exercice 13

la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en probabilité et en loi mais pas en convergence quadratique.

14. Exercice 14

1) $E(X) = \frac{1}{2}$; $Var(X) = \frac{1}{4}$; $E(X_n) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$; $Var(X_n) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

x	0		1
$P(X \le x)$	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(X_n \le x)$	0	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	1

2)

X \ X_n	0	1	Σ
0	a	$\frac{1}{2} - a$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) - a$	$\frac{1}{2n} + a$	$\frac{1}{2}$
Σ	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	1

$0 \le a \le \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

3)

x	-1	0	1
$P(X_n - X = x)$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) - a$	$\frac{1}{2n} + 2a$	$\frac{1}{2} - a$

15. **Exercice 15**

$E[(X_n - X)^2] = 1 - \frac{1}{2n} + 2a$. La suite $(X_n)_{n\in IN^*}$ converge quadratiquement vers X si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} a(n) = 1/2$. Par exemple, c'est vrai pour $a = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ et c'est faux pour $a = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

5) $(\forall\varepsilon\in]0, 1[\,)$ $P(|X_n - X| > \varepsilon) = 1 - (1/2n) + 2a$.

La suite $(X_n)_{n\in N^*}$ converge en probabilité vers X si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} a(n) = 1/2$.

4.1. $\boxed{E[(X_n)^2] = 1/n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$,

la suite (X_n) converge vers 0 en convergence quadratique donc aussi en probabilité et en loi.

4.2. $\boxed{E[(X_n)^2] = 1}$. La suite (X_n) ne converge donc pas vers 0 en convergence quadratique.

$(\forall\ \varepsilon > 0)$ $P(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, la suite (X_n) converge vers 0 en probabilité donc aussi en loi.

16. **Exercice 16**

1. On peut approcher S par $X \sim N(n/2\ ;\ n/4)$. On trouve $n \geq 96$.
Pour n = 96, $P(0{,}4 \leq S/n \leq 0{,}6) \approx 0{,}9480$; pour n = 97, $P(0{,}4 \leq S/n \leq 0{,}6) \approx 0{,}9582$.
2. On trouve n = 500.

17. **Exercice 17**

$f_{X_1}(x_1) = 1$ si $0 \leq x_1 \leq 1$; $f_{X_1}(x_1) = 0$ sinon. $f_{X_1} = f_{X_2} = f_{X_3}$.

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1).f_{X_2}(y-x_1)dx_1$; $\begin{cases}0 \leq x_1 \leq 1\\ 0 \leq y - x_1 \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \leq x_1 \leq 1\\ y-1 \leq x_1 \leq y\end{cases} \Leftrightarrow \max(0\ ;\ y-1) \leq x_1 \leq \min(1\ ;\ y) \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$.

$f_Y(y) = \int_{\max(0;y-1)}^{\min(1;y)} dy = \min(1;\ y) - \max(0\ ;\ y-1)$ si $0 \leq y \leq 2$; $f_Y(y) = 0$ sinon.

y	0		1	2
min(1 ; y)		y	1	
max(0 ; y – 1)		0	y – 1	
$f_Y(y)$	0	y	2 – y	0

$Z = Y + X_3$; $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y).f_{X_3}(z-y)dy$; $\begin{cases}0 \leq y \leq 2\\ 0 \leq z-y \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \leq y \leq 2\\ z-1 \leq y \leq z\end{cases} \Leftrightarrow \max(0\ ;\ z-1) \leq y \leq \min(2\ ;\ z) \Rightarrow 0 \leq z \leq 3$. $f_Z(z) = \int_{\max(0;z-1)}^{\min(2;z)} f_Y(y)dy$ si $0 \leq z \leq 3$; $f_Z(z) = 0$ sinon.

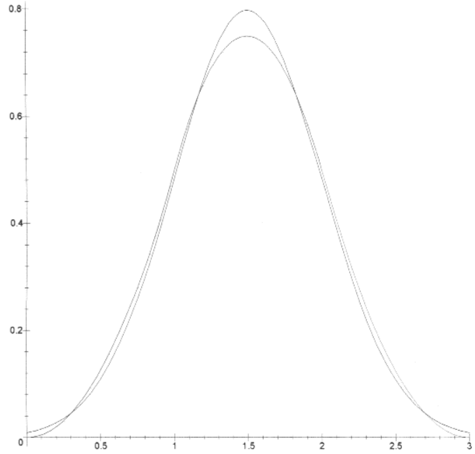
Z	0		1	2	3
min(2 ; z)		z	z	2	
max(0 ; z – 1)		0	z – 1	z – 1	
$f_Z(z)$	0	$\frac{z^2}{2}$	$-z^2 + 3z - \frac{3}{2}$	$\frac{z^2}{2} - 3z + \frac{9}{2}$	0

Explications au sujet de la dernière ligne : si $0 \leq z \leq 1$ alors $f_Z(z) = \int_0^z y.dy$;

si $1 \leq z \leq 2$ alors $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 f_Y(y)dy + \int_1^z f_Y(y)dy = \int_{z-1}^1 y.dy + \int_1^z (2-y)dy$; si $2 \leq z \leq 3$ alors $f_Z(z) = \int_{z-1}^2 (2-y)dy$.

T obéit à $N(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$; $f_T(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{\frac{-(2t-3)^2}{2}}$.

Voici les histogrammes obtenus. Celui de T est le plus pointu des deux.



18. **Exercice 18**

7. 1) X obéit à B (n ; 0,5) ; Y obéit à B (n ; 0,05). E(X) = n/2 ; E(Y) = n/20 ; V(X) = n/4 ; V(Y) = 19n/400.

2) a) $P (| \overline{X}_n - 0{,}5| > \varepsilon) < \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. $\sigma^2 = 0{,}25$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0{,}01$; n = 2500.

b) $P (| \overline{Y}_n - 0{,}05| < \varepsilon) > \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. $\sigma^2 = 19/400$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0{,}01$; n = 47500.

3) a) On considère que $\overline{X}_n$ obéit à $N (0{,}5 ; \dfrac{1}{4n})$. $0{,}2\sqrt{n} \approx 2{,}5758$. $n \approx 167$.

b) On considère que $\overline{Y}_n$ obéit à $N (0{,}05 ; \dfrac{19}{400n})$. $0{,}02 \sqrt{\dfrac{n}{19}} \approx 2{,}5758$. $n \approx 3152$.

4) Les valeurs de n obtenues à la question 2 par l'inégalité de B.T. sont beaucoup trop grandes. La valeur de n obtenue à la question 3 a) est fiable parce que l'approximation normale est convenable pour X (167/4 > 20) donc pour $\overline{X}_n$.

La valeur de n obtenue à la question 3 b) est moins fiable parce que l'approximation normale n'est pas convenable pour X. Il faudrait utiliser une approximation de Poisson.

5) a) On approche X obéissant à B (200 ; 0,5) par Z obéissant à N (100 ; 50). ($200 \times 0{,}25 = 50 > 20$)

$P(98 < X < 102) \approx P(98{,}5 < Z < 101{,}5) \approx 0{,}1680$. Le calcul direct donne : 0,1679.

b) On approche Y obéissant à B (200 ; 0,05) par T obéissant à P (10). ($200 > 30$; $0{,}05 < 0{,}1$; $200 \times 0{,}05 = 10 < 15$)

$P(8 < Y < 12) \approx P(8 < T < 12) \approx P(T = 9) + P(T = 10) + P(T = 11) \approx \left(\dfrac{10^9}{9!} + \dfrac{10^{10}}{10!} + \dfrac{10^{11}}{11!} \right) e^{-10} \approx 0{,}3640$.

Le calcul direct donne : 0,3727.

19. **Exercice 19**

1. a) $10\overline{X}_n \sim B (10 ; 0{,}5)$; **b)** $P(\overline{X}_n = 0{,}5) = P(10\overline{X}_n = 5) = C_{10}^5 . 2^{-10} = 63/256 \approx 0{,}2461$.

2. $100\overline{X}_n \sim B (100 ; 0{,}5)$; $P(0{,}4 < \overline{X}_n < 0{,}6) = P(40 < 100\overline{X}_n < 60)$.

Puisque $100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25 > 20$, on peut approcher $100\overline{X}_n$ par $Y \sim N (50 ; 25)$.

$P(40 < 100\overline{X}_n < 60) \approx P (40{,}5 < Y < 59{,}5) \approx 0{,}9426$. Le calcul direct donne 0,9431.

3. $100\overline{X}_n \sim B (100 ; 0{,}05)$; $P(0{,}04 < \overline{X}_n < 0{,}06) = P(100\overline{X}_n = 5)$.

Puisque $\begin{cases} 100 > 30 \\ 0{,}05 < 0{,}1 \\ 100 \times 0{,}05 = 5 < 15 \end{cases}$, on peut approcher $100\overline{X}_n$ par $Z \sim P (5)$. $P(Z = 5) \approx 0{,}1755$. Le calcul direct donne 0,1800.

4. $100\overline{X}_n \sim N (0 ; 100)$; $\overline{X}_n \sim N (0 ; 1/100)$; $P(-0{,}05 < \overline{X}_n < 0{,}05) \approx 0{,}3829$.

5. a) à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff : $P(-0{,}2 < \overline{X}_n < 0{,}2) \geq 0{,}75$;

b) à l'aide du théorème limite fondamental : on utilise pour approcher $\overline{X}_n$ la loi N (0 ;1/100) ; $P(-0{,}2 < \overline{X}_n < 0{,}2) \approx 0{,}9545$.

6. a) à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff : 2000 ;

b) à l'aide du théorème limite fondamental : on utilise pour approcher $\overline{X}_n$ la loi N (0 ; $\frac{1}{n}$) ; $n \approx 19{,}6^2 \approx 384$.

20. Exercice 20

a) X_i est une variable de Bernoulli de paramètre 0,6 ; $E(X_i) = 0{,}6$; $Var(X_i) = 0{,}24$.

b) $E(\overline{X}_n) = 0{,}6$; $Var(\overline{X}_n) = 0.24/n$.

c) $P(\,|\overline{X}_n - 0{,}6| > 0{,}1\,) \leq \frac{0{,}24}{0{,}01n}$; $\frac{0{,}24}{0{,}01n} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq 2400$.

d) $n\overline{X}_n \sim B(n\,;0{,}6)$; $E(n\overline{X}_n) = 0{,}6n$; $Var(n\overline{X}_n) = 0{,}24n$.

e) Pour $0{,}24n \geq 20$, c'est à dire pour $n \geq 84$, on peut approcher $n\overline{X}_n$ par $Z_n \sim N(0{,}6n\,;0{,}24n)$.

f) n = 149 (avec la correction de continuité ; 160 sans elle). L'approximation normale étant justifiée pour $n\overline{X}_n$, elle l'est pour $\overline{X}_n$. On peut accepter n = 149.

21. Exercice 21

a) $P(150 \leq \overline{X}_n \leq 170) \approx 0{,}7888$; l'inégalité de Tchébycheff conduit à une minoration de 0,36.

b) Selon une approximation normale (sans correction de continuité) : si n = 246 alors $P(155 \leq \overline{X}_n \leq 165) \approx 0{,}95$.

Selon l'inégalité de Tchébycheff, si $n \geq 1280$ alors $P(155 \leq \overline{X}_n \leq 165) \geq 0{,}95$.

c) Si $\theta = 0{,}4$ et n = 25, le calcul direct de $P(0{,}68 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}92)$ donne 0,6877 ; l'approximation normale avec correction de continuité donne aussi 0,6877 ; l'approximation normale sans correction de continuité donne 0,6135.

Si $\theta = 0{,}0075$ et n = 100, le calcul direct de $P(\overline{X}_n > 0)$ donne 0,7781 ; l'approximation de Poisson (justifiée ici) donne 0,7769 ; l'approximation normale avec correction de continuité donne 0,7938 ; l'approximation normale sans correction de continuité donne 0,8907.

22. Exercice 22

1) a) $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7) > 0{,}76$. b) $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7) \approx 0{,}9588$ c) 0,9588 est plus près de la réalité que 0,76.

2) a) Si $n \geq 480$ alors $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7) > 0{,}95$.

b) si n = 92 alors $P(0{,}5 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}7) \approx 0{,}95$. La valeur 92 est acceptable pour n.

3) a) $S_n \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}6)$. b) On peut approcher S_n par $Y_n \sim \mathcal{N}(60\,;24)$ puisque 24 > 20.

c) Approcher S_n par Y_n, c'est approcher $\overline{X}_n$ par $Z_n \sim \mathcal{N}(0{,}6\,;\frac{3}{1250})$.

4) a) $S_n \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}06)$. b) On peut approcher S_n par $Y_n \sim \mathcal{P}(6)$ car 0,06 < 0,1 et 100 > 30 et 6 < 15.

$P(0{,}05 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}07) \approx P(5 \leq Y_n \leq 7) \approx 0{,}4589$. Le calcul direct donne 0,4715.

c) L'approximation normale avec correction de continuité donne 0,4724.

L'approximation normale sans correction de continuité donne 0,3264.

L'approximation normale avec correction de continuité est meilleure que l'approximation de Poisson.

23. Exercice 23

1) $E(M_n) = 1$; $\sigma(M_n) = 1/\sqrt{n}$ 2) 0,5 3) 0,8428 4) 0,8453

5) a) Si x > 0 alors $g_n(x) = n^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-nx}$; sinon $g_n(x) = 0$ b) 0,8453

24. Exercice 24

1) $X_i \sim$ Bernoulli (0,4) ; $Y_i \sim$ Bernoulli (0,05) ; $n\overline{X}_n \sim \mathcal{B}(n\,;0{,}4)$; $n\overline{Y}_n \sim \mathcal{B}(n\,;0{,}05)$.

2) a) $(\forall i\in\{0,1,...,n\})$ $P(\overline{X}_n = i/n) = C_n^i(0,4)^i(0,6)^{n-i}$; b) $(\forall i\in\{0,1,...,n\})$ $P(\overline{Y}_n = i/n) = C_n^i(0,05)^i(0,95)^{n-i}$.

3) a) On peut approcher $n\overline{X}_n$ par $Z_n \sim \mathcal{N}(40 ; 24)$ car 24 > 20 ;

$P(0,35 \le \overline{X}_n \le 0,5) = P(35 \le n\overline{X}_n \le 50) \approx P(34,5 \le Z_n \le 50,5) \approx 0,3692 + 0,4850 \approx 0,8532$;

calcul direct : $0,9832 - 0,1303 \approx 0,8529$.

On peut approcher $n\overline{Y}_n$ par $T_n \sim \mathcal{P}(5)$ car 100 > 30 et 0,05 < 0,1 et 5 < 15 ;

$P(0,04 \le \overline{Y}_n \le 0,07) = P(4 \le n\overline{Y}_n \le 7) \approx P(4 \le T_n \le 7) \approx 0,8666 - 0,2650 \approx 0,6016$; calcul direct : $0,8720 - 0,2578 \approx 0,6142$.

4) a) Si n = 240 alors $P(0,3 \le \overline{X}_n \le 0,5) \ge 0,9$; b) si n = 1188 alors $P(0,03 \le \overline{Y}_n \le 0,07) \ge 0,9$.

5) a) $P(|\overline{X}_n - 0,4| \le \alpha) = P(|n\overline{X}_n - 0,4n| \le \alpha n) \approx P(|Z_n - 0,4n| \le \alpha n) \approx P\left(\left|\dfrac{Z_n - 0,4n}{\sqrt{0,24n}}\right| \le \dfrac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{0,24}}\right)$;

$\dfrac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{0,24}} \approx 1,645$; $\alpha \approx 0,05$.

b) On approche $\overline{Y}_n$ par $U_n \sim \mathcal{N}\left(0,05 ; \dfrac{0,0475}{n}\right)$;

$P(|\overline{Y}_n - 0,05| \le \beta) \approx P(|U_n - 0,05| \le \beta) \approx P\left(\left|\dfrac{\sqrt{n}(U_n - 0,05)}{\sqrt{0,0475}}\right| \le \dfrac{\beta\sqrt{n}}{\sqrt{0,0475}}\right)$; $\dfrac{\beta\sqrt{n}}{\sqrt{0,0475}} \approx 1,645$; $\beta \approx 0,01$.

25. Exercice 25

1. P(A) = 1/2 ; P(B) = 1/20 ; P(C) = 1/10.

2. a) $X \sim \mathcal{B}(100 ; 1/2)$; E(X) = 50 ; Var (X) = 25.

b) Puisque 25 > 20, on peut approcher X par $Z \sim \mathcal{N}(50 ; 25)$;

$P(X \ge 55) \approx P(Z > 54,5) \approx 0,1841$; le calcul direct donne aussi $P(X \ge 55) \approx 0,1841$.

c) $Y \sim \mathcal{B}(100 ; 1/20)$; E(Y) = 5 ; Var (Y) =19/4.

d) Puisque : 100 > 30 ; 1/20 < 0,1 ; 5 < 15, on peut approcher Y par $T \sim \mathcal{P}(5)$. $P(Y \le 2) \approx P(T \le 2) \approx 0,1247$; le calcul direct donne $P(Y \le 2) \approx 0,1183$.

4. a) $E(X_i) = 9,5$; $Var(X_i) = 33,25$. **b)** $E(\overline{X_{100}}) = 9,5$; $Var(\overline{X_{100}}) = 0,3325$. **c)** $P(8,5 \le \overline{X_{100}} \le 10,5) \ge 0,6675$.

d) On approche $\sum_{i=1}^{100} X_i$ par $U \sim \mathcal{N}(950 ; 3325)$; $P(8,5 \le \overline{X_{100}} \le 10,5) = P(850 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 1050) \approx P(849,5 < U < 1050,5) \approx 0,9186$.

TD05- LOIS STATISTIQUES USUELLES (X2, GAMMA, BETA, STUDENT, FISHER)

1. Exercice 1

La fonction de répartition de Y est

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = \\ = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(-\sqrt{y}) - F_X(\sqrt{y}).$$

Dérivons par rapport à y pour obtenir la densité

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}),$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé la parité de la fonction de densité de la loi normale. Finalement, on trouve la fonction de distribution (illustrée par la figure 3.3)

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right).$$

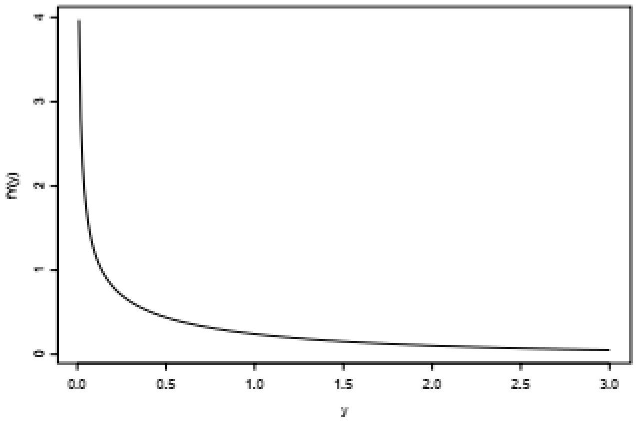


Fig. 3.3 – Fonction de distribution d'une variable aléatoire χ^2 à un degré de liberté (exercice 3.18).

2. Exercice 2

Par hypothèse, on sait que X ~ χ2 7. Par conséquent,

1. (a) On a $P(X \geq x) = 0.01 \Leftrightarrow x = 18.475$.

(b) On a $P(X \leq x) = 0.5 \Leftrightarrow P(X > x) = 0.5 \Leftrightarrow x = 6.346$.

(c) On a $P(X \leq x) = 0.7 \Leftrightarrow P(X > x) = 0.3 \Leftrightarrow x = 8.383$.

(d) On a $P(X \leq x) = 0.05 \Leftrightarrow P(X > x) = 0.95 \Leftrightarrow x = 2.167$.

(e) On a $P(X \leq x) = 0.995 \Leftrightarrow P(X > x) = 0.005 \Leftrightarrow x = 20.278$.

2. (a) On a $P(X \leq 1.24) = \alpha \Leftrightarrow P(X > 1.24) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.99 \Leftrightarrow \alpha = 0.01$.

(b) On a $P(X \leq 4.255) = \alpha \Leftrightarrow P(X > 4.255) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.75 \Leftrightarrow \alpha = 0.25$.

(c) On a $P(X \leq 12.02) = \alpha \Leftrightarrow P(X > 12.02) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.1 \Leftrightarrow \alpha = 0.9$.

(d) On a $P(X \geq 3.82) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.80$.

(e) On a $P(1.69 < X \leq 6.346) = \alpha \Leftrightarrow P(X < 6.346) - P(X < 1.69) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.475$.

3. Exercice 3

Par hypothèse, on sait que T ~ T16. Par conséquent,

1. (a) On a $P(T \leq t) = 0.75 \Leftrightarrow P(T > t) = 0.25 \Leftrightarrow t = 0.69$.

(b) On a $P(T \leq t) = 0.9 \Leftrightarrow P(T > t) = 0.1 \Leftrightarrow t = 1.337$.

(c) On a, en faisant usage de la propriété de symétrie de la loi de Student,

$P(T \geq t) = 0.75 \Leftrightarrow P(T < t) = 0.25 \Leftrightarrow P(T > -t) = 0.25 \Leftrightarrow t = -0.69$.

(d) On a, en faisant usage de la propriété de symétrie de la loi de Student,

$P(T \geq t) = 0.6 \Leftrightarrow P(T < t) = 0.4 \Leftrightarrow P(T > -t) = 0.4 \Leftrightarrow t = -0.258$.

(e) On a $P(T \leq t) = 0.9925 \Leftrightarrow P(T > t) = 0.0075 \Leftrightarrow t = 2.724$.

2. (a) On a $P(T \leq 1.337) = \alpha \Leftrightarrow P(T > 1.337) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.1 \Leftrightarrow \alpha = 0.90$.

(b) On a $P(T \leq 3.686) = \alpha \Leftrightarrow P(T > 3.686) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.001 \Leftrightarrow \alpha = 0.999$.

(c) On a $P(T \leq 3.25) = \alpha \Leftrightarrow P(T > 3.25) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.0025 \Leftrightarrow \alpha = 0.9975$.

(d) On a $P(T \geq 0.865) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.20$.

(e) On a $P(0.535 \leq T < 1.746) = \alpha \Leftrightarrow P(T < 1.746) - P(X < 0.535) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.25$.

4. Exercice 4

$\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ $\qquad \dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{2\pi}} e^{-x/2}$ si $x > 0$; 0 sinon $\qquad (1 - 2t)^{-5/2}$

5. Exercice 5

$$\frac{\Gamma(6) - \Gamma(5,5)}{\Gamma(5,5) - \Gamma(5)} = \frac{120 - \frac{945\sqrt{\pi}}{32}}{\frac{945\sqrt{\pi}}{32} - 24} = \frac{3840 - 945\sqrt{\pi}}{945\sqrt{\pi} - 768} \approx 2,3871$$

6. Exercice 6

3.1 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}.dt$ $\qquad \Gamma(6) = 5! = 120$ $\qquad \Gamma(7/2) = 15\sqrt{\pi}/8$

3.2 a) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$; $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha}.e^{-\lambda x}.x^{\alpha-1}$ si $x > 0$; $E(X) = \alpha/\lambda$; $V(X) = \alpha/\lambda^2$; $M_X(t) = \left[\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right]^{\alpha}$

b) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$; $f(x) = (81/8)x^4e^{-3x}$ si $x > 0$; $E(X) = 5/3$; $V(X) = 5/9$; $M_X(t) = 243/(3 - t)^5$

c) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$; $f(x) = (1/15\sqrt{2\pi})x^2\sqrt{x}\, e^{-x/2}$ si $x > 0$; $E(X) = 7$; $V(X) = 14$; $M_X(t) = (1 - 2t)^{-7/2}$

7. Exercice 7

$\chi^2(6)$ = gamma(3, 1/2) = Erlang (3, 1/2). $E(X) = 6$; $V(X) = 12$. $M(t) = \dfrac{1}{(1 - 2t)^3}$ $(t < 1/2)$.

$\Gamma(3) = 2$; $f(x) = \dfrac{e^{-x/2}\, x^2}{16}$ si $x > 0$; $f(x) = 0$ sinon.

8. Exercice 8

$P(X \leq 1) = 1 - e^{-1} \approx 0,6321$

9. Exercice 9

a) $\Gamma(4) = 6$. **b)** Si $x > 0$ alors $f(x) = \dfrac{x^3}{96} e^{\frac{-x}{2}}$; si $x \leq 0$ alors $f(x) = 0$.

c) Distribution d'Erlang de paramètres 4 et 1/2. X est distribuée comme la somme de 4 variables exponentielles indépendantes de même paramètre 1/2.

Autre réponse : $\chi^2(8)$. X est distribuée comme la somme des carrés de 8 variables normales centrées réduites indépendantes.

6.2. a) $\Gamma(9/2) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{16}$. **b)** Si x > 0 alors $f(x) = \dfrac{x^3\sqrt{x}}{105\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x}{2}}$; si x ≤ 0 alors f(x) = 0.

c) $\chi^2(9)$. X est distribuée comme la somme des carrés de 9 variables normales centrées réduites indépendantes.

10. Exercice 10

$\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(6) = 120$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(3/2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\Gamma(5/2) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$; $\Gamma(7/2) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$.

2. et 3.

Distribution	Densité de probabilité (t>0)	Espérance	Variance
E (1/4)	$\dfrac{e^{\frac{-t}{4}}}{4}$	4	16
Erlang (6 ; 1/4)	$\dfrac{e^{\frac{-t}{4}} t^5}{491520}$	24	96
$\chi^2(1)$	$\dfrac{e^{\frac{-t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}$	1	2
$\chi^2(7)$	$\dfrac{e^{\frac{-t}{2}} t^2\sqrt{t}}{15\sqrt{2\pi}}$	7	14
gamma (5/2 ; 1/4)	$\dfrac{e^{\frac{-t}{4}} t\sqrt{t}}{24\sqrt{\pi}}$	10	40

11. Exercice 11

$X^2 + Y^2$ obéit à la loi χ^2 (2) ou gamma (1 ; 1/2) ou E (1/2). $P(X^2 + Y^2 \le 2) = \dfrac{1}{2}\int_0^2 e^{-t/2}dt = \left[-e^{-t/2}\right]_0^2 = 1 - 1/e \approx 0{,}6321$

12. Exercice 12

9.1. $f'(t) = \dfrac{2}{(1-2t)^2}$; $f''(t) = \dfrac{8}{(1-2t)^3}$; $f'(0) = 2$; $f''(0) = 8$; $f''(0) - [f'(0)]^2 = 4$.

9.2. $f_X(x) = \dfrac{e^{\frac{-x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}$ si x > 0 ; $f_Y(y) = \dfrac{e^{\frac{-y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}$ si y > 0 ; $f_Z(z) = \dfrac{e^{\frac{-z}{2}}}{2}$ si z > 0.

9.3. $M_X(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t}}$; $M_Y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t}}$; $M_Z(t) = \dfrac{1}{1-2t}$.

9.4. E(X) = E(Y) = 1 ; E(Z) = 2 ; Var (X) = Var (Y) = 2 ; Var (Z) = 4.

9.5. $\displaystyle\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{x(z-x)}} = \pi$.

13. Exercice 13

U et V obéissent à la même loi gamma (2 ; ½).

Elles ont la même densité de probabilité f ainsi définie : $f(u) = (1/4)u.e^{(-u/2)}$ si $u>0$; $f(u) = 0$ sinon.

Elles ont la même fonction génératrice des moments $(1 - 2t)^{-2}$ ($t < ½$).

Elles ont la même espérance mathématique 4 et la même variance 8.

14. Exercice 14

X obéit à la loi gamma de paramètre de forme 3/2 et de paramètre d'échelle ½.

Cette loi est aussi la loi de χ^2 (3).

Si $x > 0$, $f_X(x) = \dfrac{\sqrt{x}e^{\frac{-x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$; sinon $f_X(x) = 0$; $_X(t) = (1 - 2t)^{-3/2}$ ($t < ½$) ; $E(X) = 3$; $Var(X) = 6$.

15. Exercice 15

12.1 $f = F'$. Si $t > 0$ alors $f(t) = e^{-t/2}\,(1/2 + t/4 + t^2/16 + t^3/96 - 1/2 - t/4 - t^2/16) = \boxed{e^{-t/2}\,\dfrac{t^3}{96}}$; sinon $f(t) = 0$.

12.2. T obéit à la loi gamma de paramètre de forme 4 et de paramètre d'échelle 1/2.

La loi de T est aussi la loi de Khy^2 à 8 degrés de liberté.

12.3. La somme $X_1^2 + X_2^2 + ... + X_8^2$ est distribuée comme T.

La probabilité que cette somme soit inférieure à 6 est $F(6) = 1 - (1 + 3 + 9/2 + 9/2)\,e^{-3} = \boxed{1 - 13e^{-3}} \approx 0{,}3528$.

16. Exercice 16

B(3 ; ½) = 16/15.

17. Exercice 17

$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^5dt = \Gamma(6) = 5\,! = 120$; $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^3\sqrt{t}dt = \Gamma(9/2) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{16}$;

$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}dt = B(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}) = \dfrac{\Gamma(3/2)\times\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = \dfrac{\pi}{8}$; $\int_0^1 t(1-t)\sqrt{t}dt = B(5/2 ; 2) = \dfrac{\Gamma(5/2)\times\Gamma(2)}{\Gamma(9/2)} = \dfrac{4}{35}$;

$\int_0^1 x^3(1-x)\sqrt{(1-x)}dx = B(4 ; 5/2) = \dfrac{\Gamma(4).\Gamma(5/2)}{\Gamma(13/2)} = \dfrac{32}{1155}$.

18. Exercice 18

$$\int_{-2}^{4} \frac{(x+2)^3}{\sqrt{4-x}}dx = \int_0^1 \frac{(6y)^3}{\sqrt{6-6y}}6dy = 216\sqrt{6}\int_0^1 \frac{y^3}{\sqrt{1-y}}dy = 216\sqrt{6}\,B(4, 1/2) = 216\sqrt{6}\,\frac{\Gamma(4)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} = 216\sqrt{6}\,\frac{3\,!}{\frac{105}{16}} = \boxed{\frac{6912\sqrt{6}}{35}}$$

$\approx 483{,}74$.

19. Exercice 19

16.1 X est uniforme sur [0 ; 1] ; $E(X) = 0{,}5$; $Var(X) = 1/12$.

16.2. $f_X(x) = 2x$ si $0 < x < 1$; $f_X(x) = 0$ sinon ; $E(X) = 2/3$; $Var(X) = 1/18$.

16.3. $f_X(x) = \dfrac{15}{4}\sqrt{x}\,(1 - x)$ si $0 < x < 1$; $f_X(x) = 0$ sinon ; $E(X) = 3/7$; $Var(X) = 8/147$.

20. Exercice 20

U obéit à la loi uniforme sur [0 ; 1]. $P(X < 2Y) = P(3X < 2(X + Y)) = P(U < 2/3) = 2/3$.

21. Exercice 21

Soit T le temps d'attente de l'arrivée de la première mouche et soit U le temps d'attente entre l'arrivée de la première mouche et l'arrivée de la deuxième mouche. T et U sont deux variables aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi gamma de paramètre de forme 1.

Soit $X = \dfrac{T}{T+U}$. X obéit à la loi bêta (1, 1), c'est à dire à la loi uniforme sur [0, 1].

$P(3T \le T + U) = P(X \le 1/3) = 1/3$.

22. Exercice 22

19.1. L (T) = Erlang (2 ; 1) = gamma (2 ;1) ; L (U) = Erlang (3 ; 1) = gamma (3 ;1) ;

T et U sont indépendantes ; L (X) = bêta (2 ; 3) ;

si $0 < x < 1$ alors $f_X(x) = \dfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(2).\Gamma(3)}\, x(1-x)^2 = 12x(1-x)^2$; sinon $f_X(x) = 0$.

19.2. $X = \dfrac{Y}{Y+1}$.

19.3. $P(Y < 1) = P(X < 0{,}5) = \int_0^{1/2} 12x(1-x)^2 dx = \int_0^{1/2} 12(x^3 - 2x^2 + x)dx = \left[3x^4 - 8x^3 + 6x^2\right]_0^{1/2}$

$P(Y < 1) = 3/16 - 1 + 3/2 = 11/16 = 0{,}6875$.

23. Exercice 23

20.1. L (T) = Erlang (4 ; 1) = gamma (4 ;1) ; L (U) = Erlang (3 ; 1) = gamma (3 ;1) ;

T et U sont indépendantes ; L (X) = bêta (4 ; 3) ;

si $0 < x < 1$ alors $f_X(x) = \dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(4).\Gamma(3)}\, x^3(1-x)^2 = 60x^3(1-x)^2$; sinon $f_X(x) = 0$.

20.2. $P(T < U) = P(2T < T + U) = P(X < 1/2)$;

$P(T < U) = \int_0^{1/2} 60x^3(1-x)^2 dx = \int_0^{1/2} 60(x^5 - 2x^3 + x^2)dx = \left[10x^6 - 24x^5 + 15x^4\right]_0^{1/2} = 11/32 = 0{,}34375$.

24. Exercice 24

$P(T_3 \le \frac{3}{2} T_2) = P(T_2 + (T_3 - T_2) \le \frac{3}{2} T_2) = P(\dfrac{T_2}{T_2 + (T_3 - T_2)} \ge \frac{2}{3})$.

Soit $T = \dfrac{T_2}{T_2 + (T_3 - T_2)}$. T obéit à la loi bêta (2 ; 1). Sa densité de probabilité est ainsi définie :

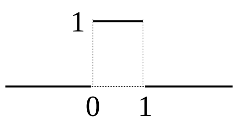
$f_T(t) = \dfrac{t}{B(2;\,1)} = 2t\ (0 < t < 1)$. $P(T \ge \frac{2}{3}) = \int_{2/3}^{1} 2t dt = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

25. Exercice 25

1. a) X, Y, Z sont indépendantes parce que, dans un processus de Poisson, les temps d'attente successifs sont indépendants.
b) X, Y, Z sont des variables exponentielles donc des variables gamma de paramètre de forme 1.

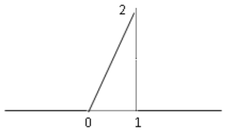
2.

a) T obéit à la loi bêta de paramètres 1 et 1. Sa densité de probabilité f_T est ainsi définie :
$f_T(t) = \dfrac{1}{B(1,1)}\, t^{1-1}(1-t)^{1-1}$ si $0 < t < 1$; $f_T(t) = 0$ sinon ; $B(1, 1) = \dfrac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \dfrac{0!0!}{1!} = 1$;
donc : $f_T(t) = 1$ si $0 < t < 1$; $f_T(t) = 0$ sinon ; T est uniforme sur [0 ; 1].



b) U obéit à la loi bêta de paramètres 2 et 1. Sa densité de probabilité f_U est ainsi définie :

$f_U(u) = \dfrac{1}{B(2,1)} u^{2-1}(1-u)^{1-1}$ si $0 < u < 1$; $f_U(u) = 0$ sinon ; $B(2, 1) = \dfrac{\Gamma(2)\Gamma(1)}{\Gamma(3)} = \dfrac{1!0!}{2!} = \dfrac{1}{2}$;



donc : $f_U(u) = 2u$ si $0 < u < 1$; $f_U(u) = 0$ sinon.

3. $P(X + Y > Z) = P(2(X + Y) > X + Y + Z) = P(U > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 2u.du = \left[u^2\right]_{1/2}^{1} = \frac{3}{4}$.

26. Exercice 26

1. $Z \sim F(2, 2)$; $f_Z(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$ si $z > 0$; $f_Z(z) = 0$ sinon ; $p = P(Z < \frac{3}{4}) = \int_0^{3/4} \dfrac{dz}{(1+z)^2} = 1 - \dfrac{1}{1+3/4} = \dfrac{3}{7}$.

2. $T \sim$ bêta (1, 1) ; $f_T(t) = 1$ si $0 < t < 1$; $f_T t) = 0$ sinon ; $p = P(7X < 3(X + Y)) = P(T < 3/7) = \frac{3}{7}$.

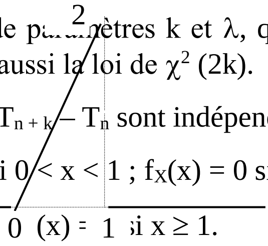
27. Exercice 27

1. T_n obéit à la loi d'Erlang de paramètres n et λ, qui est aussi la loi gamma de paramètre de forme n et de paramètre d'échelle λ. Si λ = 1/2, c'est aussi la loi de χ^2 (2n).

$T_{n+k} - T_n$ est distribuée comme T_k. Elle obéit à la loi d'Erlang de paramètres k et λ, qui est aussi la loi gamma de paramètre de forme k et de paramètre d'échelle λ. Si λ = 1/2, c'est aussi la loi de χ^2 (2k).

Le futur de l'occurrence N°n étant indépendant de son passé, T_n et $T_{n+k} - T_n$ sont indépendantes.

2. a) X obéit à la loi bêta de paramètres 2 et 4. $f_X(x) = 20x(1-x)^3$ si $0 < x < 1$; $f_X(x) = 0$ sinon.



$F_X(x) = 0$ si $x \le 0$; $F_X(x) = 10x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 4x^5$ si $0 < x < 1$; $F_X(x) = 1$ si $x \ge 1$.

b) $p = F_X(\frac{1}{3}) = \frac{131}{243} \approx 0{,}5391$. **c)** $E(X) = 1/3$; $V(X) = 2/63$.

3. a) Le rapport étant indépendant de l'échelle, Y obéit à la loi de Fisher-Snedecor de paramètres 4 et 8.

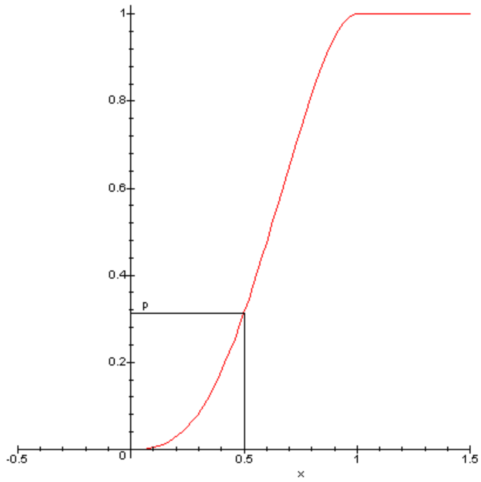
$f_Y(y) = \dfrac{320y}{(y+2)^6}$ si $y > 0$; $f_Y(y) = 0$ sinon. $F_Y(y) = 1 - \dfrac{80}{(y+2)^4} + \dfrac{128}{(y+2)^5}$ si $y > 0$; $F_Y(y) = 0$ sinon.

b) $p = F_Y(1) = 131/243$.

28. Exercice 28

1. a) $f_X(x) = 12(x^2 - x^3)$ si $0 < x < 1$; $f_X(x) = 0$ sinon ; $E(X) = 3/5$; $V(X) = 1/25$.

b) $F_X(x) = 0$ si $x \le 0$; $F_X(x) = 4x^3 - 3x^4$ si $0 < x < 1$; $F_X(x) = 1$ si $x \ge 1$.



c) $p = P(T < U) = P(2T < T + U) = P(\dfrac{T}{T+U} < \dfrac{1}{2}) = F_X(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$.

25.2. a) $f_Y(y) = \dfrac{1296\,y^2}{(2+3y)^5}$ si $y > 0$; $f_Y(y) = 0$ sinon.

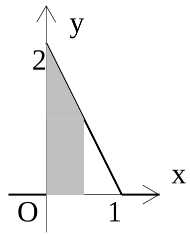
b) $p = P(T < U) = P(\dfrac{T}{U} < 1) = P(\dfrac{2T}{3U} < \dfrac{2}{3}) = P(Y < \dfrac{2}{3}) = 1296 \int_0^{2/3} \dfrac{y^2}{(2+3y)^5} dy$.

c) $\int_0^{2/3} \frac{y^2}{(2+3y)^5}\,dy = \frac{5}{16\times 1296} = \frac{5}{20736} \approx 0{,}000241$.

29. **Exercice 29**

1. a) T a pour paramètre de forme 1 ; U a pour paramètre de forme 2.

b) T et U sont indépendantes parce que le futur du passage d'Aline et le passé du passage d'Aline sont indépendants.



2. a) X obéit à la loi bêta de paramètres 1 et 2. Si $0 < x < 1$ alors $f_X(x) = \frac{1}{B(1,2)}(1-x) = \boxed{2(1-x)}$; sinon $f_X(x) = 0$.

b) d) Histogramme de X et matérialisation de p :

c) $p = P(T + U \geq 2T) = P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} 2(1-x)dx = \left[-(1-x)^2\right]_0^{1/2} = 1 - 1/4 = \boxed{3/4}$.

3. a) T obéit à une loi de Khy^2 à 2 degrés de liberté ; U obéit à une loi de Khy^2 à 4 degrés de liberté ;

T et U sont indépendantes ; $Z = (T/2) / (U/4)$;

Z obéit donc à une loi de Fisher-Snedecor de paramètres 2 et 4.

Si $z > 0$ alors $f_Z(z) = \frac{\frac{1}{2}}{B(1,2)} \times \frac{1}{(1+\frac{z}{2})^3} = \boxed{\frac{8}{(2+z)^3}}$; sinon $f_Z(z) = 0$.

b) $p = P(T + U \geq 2T) = P(U \geq T) = P(2U \geq 2T) = P(Z \leq 2) = \int_0^2 \frac{8}{(2+z)^3}dz = \left[\frac{-4}{(2+z)^2}\right]_0^2 = -1/4 + 1 = \boxed{3/4}$.