1. TD01- ENSEMBLES ET DENOMBREMENTS

1.1. Exercice (Ensemble)

E est l'ensemble des habitants d'une ville ; Card(E) = 2500. A est l'ensemble des hommes de cette ville ; Card(A) = 1220. B est l'ensemble des retraités de cette ville ; Card(B) = 670. 400 femmes sont retraitées. Créer puis compléter un tableau de contingence; dire alors combien d'hommes, dans cette ville, ne sont pas retraités, puis combien de personnes sont des femmes ou des retraités.

	A	$\bar{A}$	
B			
$\bar{B}$			

1.2. Exercice (Ensemble)

A et B étant des sous-ensembles de E, simplifier les écritures suivantes :

$\bar{A}\cap(A\cup\bar{B})\cap B$ $\quad$ $A\cap(\overline{A\cup B})$ $\quad$ $(A\cup B)\cap(A\cap\bar{B})\cap(A\cup\bar{B})$

$A\cup(A\cap B)$ $\quad$ $(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$ $\quad$ $(A\cup\bar{B})\cap(\overline{A\cap B})$

1.3. Exercice (Ensemble)

E = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20}. Soit deux parties de E : A est l'ensemble des nombres pairs de E et B celui des multiples de 5 dans E.

1) Définir le complémentaire de A dans E. Donner ses éléments.

2) Donner les ensembles A∩B et A∩$\bar{B}$. Quelle est leur réunion ?

1.4. Exercice (Ensemble)

Après dépouillement d'un sondage réalisé sur un échantillon de 500 personnes, il apparaît que 154 d'entre elles vont au cinéma au moins une fois par mois, 228 achètent du popcorn lorsqu'elles vont au cinéma, et parmi celles qui vont au cinéma moins d'une fois par mois, 131 y achètent du popcorn.

1) Si on appelle A l'ensemble des personnes qui vont au cinéma au moins une fois par mois et B l'ensemble des personnes qui achètent du popcorn lorsqu'elles vont au cinéma, former le tableau de contingence correspondant.

2) Répondre en citant le cardinal de l'ensemble approprié et en justifiant le résultat s'il n'est pas directement visible dans votre tableau :

a. Parmi les personnes qui vont au cinéma au moins une fois par mois, combien achètent du popcorn ?

b. Sur les 500, combien de personnes vont au cinéma moins d'une fois par mois ?

c. Sur les 500, combien correspondent à A ou à B ?

1.5. Exercice (Dénombrements)

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves s'intéressent au jeu d'échecs et 3 élèves s'intéressent à la fois à la musique et au jeu d'échecs. Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique ni au jeu d'échecs ?

1.6. Exercice (Dénombrements)

Dans un centre de vacances accueillant cent vingt personnes, on sait que quatre-vingt personnes pratiquent le tennis et quinze le canoë. En outre, six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

1.7. Exercice (Dénombrements)

Jouer au loto, c'est choisir, sans ordre ni répétition, 5 numéros parmi les entiers de 1 à 49 et un numéro, dit numéro Chance, parmi les entiers de 1 à 10. Il est possible que le numéro Chance soit l'un des 5 entiers choisis.

Dénombrer les jeux possibles.

Si un passionné effectue 2 jeux par semaine, sans jamais se répéter, en combien d'années épuisera-t-il les possibilités ?

1.8. Exercice (Dénombrements)

Calculer sans calculatrices

1. $\frac{15!}{14!}$ $\frac{12!}{10!}$ $\frac{8!-7!}{7!}$

1.9. Exercice (Dénombrements)

Les p-mots sont les collections ordonnées de p lettres ($p \in \mathbb{N}^*$), avec d'éventuelles répétitions. On rappelle que l'alphabet est constitué de 6 voyelles et de 20 consonnes.

Dénombrer :

1) les 2-mots ;
2) les 2-mots sans consonne ;
3) les 2-mots sans voyelle ;
4) les 2-mots sans lettre répétée ;
5) les 2-mots commençant par une consonne ;
6) les 2-mots finissant par une voyelle ;
7) les 2-mots commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
8) les 2-mots contenant une consonne et une voyelle ;
9) les 4-mots sans voyelle répétée et sans consonne.

1.10. Exercice (Dénombrements)

Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y, Z portant sur un échantillon de 1000 personnes donne le résultat suivant :

– 60% lisent X, 50% lisent Y et 50% lisent Z ;
– 20% lisent Y et Z, 30% lisent X et Z, 30% lisent X et Y ;
– 10% lisent ces trois revues.

Parmi ces 1000 personnes :

1. Combien lisent deux revues exactement ?
2. Combien ne lisent aucune de ces revues ?

1.11. Exercice (Dénombrements)

On dispose d'un jeu de 32 cartes à partir duquel on tire simultanément cinq cartes, formant alors une main.

1. Identifier l'ensemble fondamental correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Combien de mains peut-on constituer (justifier votre réponse) ?
3. Combien de mains contenant exactement un 10, un valet, une dame, un roi et un as peut-on constituer ?
4. Combien de mains contenant au moins un 8 peut-on constituer ?
5. Combien de mains contenant au plus trois valets peut-on constituer ?

1.12. Exercice (Dénombrements)

Quatre couples mariés vont voir un spectacle pour lequel ils possèdent huit places (côte à côte) dans une même rangée.

1. De combien de manières différentes ces huit personnes peuvent-elles se placer si aucune restriction n'est imposée ?
2. De combien de manières différentes ces huit personnes peuvent-elles se placer si l'on impose que les couples restent ensembles ?
3. De combien de manières différentes ces huit personnes peuvent-elles se placer si l'on impose que l'on a : d'un coté les femmes et de l'autre les hommes ?

1.13. Exercice

Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a retrouvé dix-huit personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui soit par non, à chacune des questions suivantes :

– “Avez-vous entendu une détonation ?”

– “Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?”

Dix personnes ont répondu “oui” à la première question. Six personnes ont répondu “non” à la deuxième question. Cinq personnes ont répondu “non” aux deux questions. Combien de personnes ont répondu “oui” aux deux questions?

1.14. Exercice

Une femme a 8 amies et décide d'en inviter 5 à prendre le thé.

1. De combien de manières peut-elle s'y prendre si deux d'entre elles sont en mauvais termes et ne viendront en aucun cas ensemble ?

2. Et si au contraire deux d'entre elles ne viendront que si l'autre est aussi invitée ?

1.15. Exercice

1.Un joueur de scrabble pioche trois lettres distinctes : a, g et m. Combien de “mots” peut-il écrire avec ces trois lettres ?

2. Il pioche de nouveau trois lettres. Parmi ces lettres, deux sont identiques : e, e et r. Combien de “mots” peut-il écrire ? Ecrire le résultat sous la forme d'un rapport de factorielles.

3. Le joueur pioche cette fois quatre lettres. Parmi ces lettres, il observe deux fois deux lettres identiques : a, a, t et t. Combien de “mots” peut-il écrire avec ces quatre lettres ? Ecrire le résultat sous la forme d'un rapport de factorielles.
4. Proposer une généralisation du résultat au cas où l'on dispose de n lettres parmi lesquelles n1 sont identiques, n2 sont identiques, ... , nk sont identiques avec n1 + n2 + ... + nk = n.

TD02-PROBABILITES ELEMENTAIRES

1.1. Exercice

Quatre hommes déposent leur chapeau au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 des 4 chapeaux. Calculer les probabilités suivantes.

1. Aucun des 4 hommes ne prend son propre chapeau.
2. Exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau.

1.2. Exercice

Parmi les familles de 2enfants, la moitié se trouve être bien répartie, c'est-a-dire composée d'autant de garçons que de filles. En est-il de même parmi les familles de 4 enfants ? (On suppose ici que chaque naissance donne avec équiprobabilité un garçon ou une fille.)

1.3. Exercice

On classe 5 hommes et 5 femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! Classements possibles ont tous la même probabilité de se réaliser. On désigne le rang de la meilleure femme par X (par exemple X vaudra 2si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Donner la fonction de fréquences de X, c'est-à-dire P (X = i) pour i = 1, . . ., 10.

1.4. Exercice

On considère 3 événements A, B, et C.

1. A l'aide d'un dessin des ensembles ` A, B et C, trouver une formule permettant de calculer P(A∪B∪C) si l'on connaît les probabilités de chacun de ces événements et les probabilités des intersections de ces événements.
2. Démontrer cette formule à partir des axiomes de la théorie des probabilités.

1.5. Exercice

Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point ; quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque 1. Pour qui parieriez-vous?

1.6. Exercice

On tire au hasard 2cartes d'un jeu de cartes de poker (52cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un black jack, ou autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi?

1.7. Exercice

Problème posé par le Chevalier de Mérée à Pascal en 1654. Quel est l'événement le plus probable : obtenir au moins 1 fois 1 as en lançant 4 fois un dé ou obtenir au moins 1 fois 1 double as en lançant 24 fois 2 dés?

1.8. Exercice (Probabilité)

A et B sont deux évènements d'un espace probabilisable vérifiant $P(\overline{A}) = 0{,}6 \quad P(\overline{B}) = 0{,}7 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}55$

1. Calculer P(AUB) et P(A⋂B).
2. Calculer la probabilité que A se réalise mais pas B.
3. Calculer la probabilité que A se réalise ou que B ne se réalise pas.

1.9. Exercice (Probabilité)

Un système est formé de deux composants a et b. On note A l'évènement « a fonctionne »"et B l'évènement « b fonctionne ». A la suite de tests statistiques, on sait que :

- la probabilité que a fonctionne est égale à 0,7
- la probabilité que a et b soient en panne est égale à 0,2

• la probabilité que seul b soit en panne est égale à 0,3.

1. Traduire les hypothèses sous forme ensembliste.
2. Calculer la probabilité que a et b fonctionnent.
3. Calculer la probabilité que a ou b fonctionnent.
4. Calculer la probabilité que b fonctionne.
5. Calculer la probabilité que seul a soit en panne.

1.10. Exercice (Probabilités totales)

Une population est composée de 42% d'italiens, 30% d'espagnols et 28% d'allemands. ´

40% des italiens parlent français et 35% des espagnols parlent français.

Parmi ceux qui parlent français, 25% sont allemands.

1. Ecrire les hypothèses sous forme probabiliste. `

2. On note x la proportion d'allemands qui parlent français. Calculer en fonction de x la proportion d'individus qui parlent français dans la population.

3. Calculer x.

1.11. Exercice (Formule de Bayes)

Une boîte contient des dés dont 10% sont pipés. Pour chacun des dés pipés, la probabilité d'apparition du 6 est égale ´ a 1/3. On tire au hasard un de du lot et on obtient un 6; calculer la probabilité qu'il soit pipé.

1.12. Exercice (indépendance)

Montrer que A et B sont deux évènements indépendants ⇔ $\bar{A}$ et $\bar{B}$sont indépendants.

TD03 VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

1.1. Exercice

Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,10	0,30	0,40	0,10	0,05	0,05

1. Calculer : (a) $P(X < 4,5)$ (b) $P(X > 2)$ (c) $P(2 < X < 4,5)$ (d) $P(2 \leq X < 4,5)$

2. (a) déterminer la fonction de répartition de la loi de X notée F(x) et la tracer

(b) calculer E[X], (c) calculer V[X] et σ[X].

1.2. Exercice

On considère une urne qui contient 22 boules. Trois d'entre elles portent le numéro 1, six portent le numéro 2, cinq portent le numéro 3 et les autres portent le numéro 4. On tire une boule au hasard et on définit la variable aléatoire X représentant le numéro porté par la boule. Etablissez la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

1.3. Exercice

On lance deux dés.

1. On considère la variable aléatoire X donnant la somme des deux valeurs obtenues. Quelle est la loi de X ?

2. On considère la variable aléatoire Y donnant l'étendue des deux valeurs obtenues, c'est-à-dire la différence entre la plus grande et la plus petite valeur. Quelle est la loi de Y ?

3. Quelle est la loi de Z = X + Y ?

4. Calculer l'espérance de Z et comparer avec E(X] + E(Y).

5. Calculer la variance de Z et comparer avec V(X] + V(Y).

1.4. Exercice

Tintin et le capitaine Haddock jouent plusieurs parties d'échecs. Tintin est plus fort que le capitaine Haddock. En effet la probabilité que Tintin gagne la première partie est de 0,7. La probabilité que Tintin gagne est également de 0,7 à n'importe laquelle des parties suivantes quand il a gagné la partie précédente. S'il a perdu la partie précédente, cette probabilité n'est plus que de 0,5. Dans tout ce qui suit, on suppose que chaque partie d'échecs a un gagnant et un perdant et qu'il n'y a donc pas de partie nulle.

1. Ils jouent trois parties. On note X le nombre de victoires de Tintin. Etablissez la loi de X.

2. Donnez une prévision du nombre de victoire du capitaine Haddock. Calculez la variance de ce même nombre de victoires.

3. Le lendemain, Tintin joue deux parties contre le même adversaire tiré à pile ou face entre la Castafiore et le capitaine Haddock. La Castafiore est très forte aux échecs de sorte que la probabilité que Tintin gagne contre elle est de 0,2 à la première partie et est également de 0,2 à la seconde partie s'il a gagné la première. Elle n'est plus que de 0,1 à la seconde partie s'il a perdu la première. On note Z le nombre de victoires de Tintin ce lendemain. Etablissez la loi de Z.

1.5. Exercice (probabilités conditionnelles)

On a à disposition 2 tests sanguins pour le dépistage du HIV : d'une part l'ELISA, relativement bon marché (environ 2 0 e) et raisonnablement fiable, et d'autre part le Western Blot (WB), nettement meilleur mais beaucoup plus cher (environ 100 e). Un patient vient vers vous, un médecin, avec des symptômes vous suggérant qu'il peut être HIV-positif. Pour ce patient, la prévalence du HIV est estimée par la littérature médicale à P (A) = P (il est HIV-positif) = 0,01. Les données concernant des personnes dont on connaît le statut HIV apportent :

P (ELISA positif | HIV-positif) = 0,95 ; P (ELISA négatif | HIV-négatif) = 0,98.

En utilisant le théorème de Bayes, calculer : P (HIV-positif | ELISA négatif) et P (HIV-négatif | ELISA positif).

Quelle(s) conséquence(s) peut-on en tirer sur l'utilisation de l'ELISA?

On note :

c1 = coût du test ELISA = 20 e ; c2 = coût du test WB = 100 e ;

LI = coût supplémentaire engendré par le faux diagnostic : conclure que le patient est HIV-négatif alors qu'il est HIV-positif = 1 000 000 e ;

LII = coût supplémentaire engendré par le faux diagnostic : conclure que le patient est HIV-positif alors qu'il est HIV-négatif = 1 000 e.

La 1re stratégie est la suivante : on fait le test de l'ELISA. S'il est négatif, on considère que le patient est HIV-négatif. Sinon qu'il est HIV-positif.

Une 2e stratégie est comme la 1re, sauf que si l'ELISA est positif, on fait en plus le WB. Si ce dernier est positif, on considère que le patient est HIV-positif, sinon qu'il est HIV-négatif.

On formalise la 2e stratégie ainsi

– les issues possibles sont composées de triplets (statut HIV, statut ELISA, statut WB). Par exemple, on considère (+, + ,+) ;

– une probabilité associée à chaque issue. Pour (+, + ,+) c'est 0,00945;

– à chaque issue est associée une valeur, définissant ainsi une variable aléatoire U, appelée utilité. Pour (+, + ,+), c'est −c1 − c2 = −120 e. Pour (+, − ,−), c'est −c1 − LI = −1 000 020 e.

1. Compléter le tableau suivant résumant la 2e stratégie

Prob.	Vrai statut HIV	Statut ELISA	Statut WB	Utilité
0,00945	+	+	+	$-c_1 - c_2$
0,00005	+	+	-	$-c_1 - c_2 - L_I$
0,00004	+	-	(+)	$-c_1 - L_I$
	+	-	(-)	$-c_1 - L_I$
0,0001	-	+	+	$-c_1 - c_2 - L_{II}$
0,0197	-	+	-	
0,00095	-	-	(+)	$-c_1$
0,96925	-	-	(-)	

2. Calculer l'espérance de l'utilité.

3. Pour la 1re stratégie, faire de même (tableau et espérance de l'utilité).

4. Quelle stratégie faut-il adopter? (Discuter en fonction de LI et LII.)

1.6. Exercice

Vous vous promenez en forêt et vous tombez nez-à-nez avec un ours affamé. Heureusement, vous ne sortez jamais sans votre fusil, mais vous n'avez cependant que 3 cartouches en poche. Sachant qu'à chaque tir, vous avez une probabilité p d'atteindre votre objectif, c'est-à-dire de tuer l'ours, et en notant X la variable aléatoire représentant le nombre de tirs strictement nécessaires pour tuer l'ours, répondez aux questions suivantes.

1. Calculez P (X = 1), P (X = 2), et P (X = 3) en fonction de p.

2. Donnez également P (X ≤ 3). Que représente cette probabilité?

3. Sachant que E(X) = 1/p, quelle est la valeur minimale de p pour espérer sortir vivant de ce mauvais pas?

4. En réalité, l'angoisse et le stress diminuent vos aptitudes au tir si bien que la probabilité d'atteindre l'ours au ie essai est donnée par pi. Donnez dans ce cas P (X = 1), P (X = 2) et P (X = 3) et comparez ces probabilités avec celles obtenues au point 1

1.7. Exercice

Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose X « le nombre d'essais pour ouvrir la porte ».

1. Calculer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire P (X = k) avec k =1, 2, 3, 4.

2. Calculer E(X) et Var(X).

1.8. Exercice

Le fisc répartit les ménages en 5 classes de revenu. Les données de l'année fiscale 2005 lui apportent :

Classe 1 : 19 000 ménages ; Classe 2: 45 000 ménages ; Classe 3 : 28 000 ménages ; Classe 4 : 9 000 ménages.

Classe 5 : 2000 ménages. Notons X la variable aléatoire « classe d'appartenance ».

1. Trouver la fonction de répartition de X.
2. Calculer $P(2 < X \leq 4)$ et $P(X > 4)$.
3. Calculer E(X) et Var(X)

1.9. Exercice

Jeu "chuck a luck" (Etats-Unis), "crown and anchor" (Angleterre). On parie sur un nombre de 1 à 6. On lance 3 dés. Si le nombre sur lequel on a parié sort : 3 fois, on gagne 3 euros ; 2 fois, on gagne 2 euros ; 1 fois, on gagne 1 euro ; 0 fois, on perd 1 euro. Soit X le gain lors d'une partie, déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

1.10. Exercice

Un joueur s'installe au hasard devant l'une des trois machines à sous d'une salle de jeux. La probabilité respective de gains de chacune de ces machines est 1/3, 1/4 et 0 (la dernière étant détraquée).

1. Quelle est la probabilité de perdre sur un coup ?
2. Quelle est la probabilité de perdre 2 coups de suite ?
3. Quelle est la probabilité de perdre n coups de suite, $n \in \mathbb{N}^*$?
4. Sachant que le joueur a perdu deux fois de suite, quelle ait la probabilité qu'il est joué avec la machine détraquée ?

Note : on désignera par Nn la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le joueur perd sur n tentatives

TD04 LOIS USUELLES DISCRETES

1.1. Exercice (Loi uniforme)

Un concierge a un trousseau de 5 clés dont une seule ouvre une porte. Il les essaie l'une après l'autre en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu.

1. Déterminer la loi de la variable associée au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
2. Calculer l'espérance du nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

1.2. Exercice (Loi binomiale)

Un canal de transmission d'information ne peut traiter que des 0 et des 1. A cause de perturbations dues à l'électricité statique chaque chiffre transmis l'est avec une probabilité d'erreur de 0,2. Admettons que l'on veuille transmettre un message important limité à un signal binaire. Pour éviter une erreur on transmettra 00000 au lieu de 0 et 11111 au lieu de 1. Si le récepteur décode suivant la règle de la majorité, quelle est la probabilité que le message soit mal interprété?

1.3. Exercice (Loi binomiale)

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25 % sont avariés. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit X le « nombre de pommes avariées dans un emballage ». Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier?
3. Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aurait-il de plaintes?

1.4. Exercice (Loi binomiale+ approximation par poisson)

Giovanni, dit Gianni, a décidé de parcourir cet été 10 000 km en Fiat Ritmo. Or la probabilité d'avoir un accident sur 1 km est de 1/10 000. En prenant connaissance de cette probabilité, Gianni décide alors d'annuler son long voyage en prétextant d'être sûr d'avoir un accident.

Etes-vous d'accord avec Gianni? Si ce n'est pas le cas, quelle est l'erreur commise par notre ami Gianni? Quel est alors approximativement la probabilité que Gianni ait un accident?

1.5. Exercice

Un journaliste se voit remettre une liste de personnes à interviewer. Il doit interroger 5 personnes au moins. Les interviewés potentiels n'acceptent de parler qu'avec une probabilité de 2 /3, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité qu'il puisse réaliser ses 5 entretiens si la liste compte 5 noms? Et si elle en compte 8?

1.6. Exercice

Des études effectuées par les compagnies aériennes montrent qu'il y a une probabilité de 0,05 que chaque passager ayant fait une réservation n'effectue pas le vol. A la suite de ça, SA Airlines vend toujours 94 billets pour ses avions à 90 sièges, tandis que BA Airlines vend toujours 188 billets pour ses avions à 180 sièges. Avec quelle compagnie un passager ayant réservé un siège risque-t-il le plus de ne pas pouvoir prendre place dans l'avion ?

1.7. Exercice

Madame Gourmande prépare des biscuits aux raisins secs et aux pépites de chocolat. Elle mélange 600 raisins et 400 pépites de chocolat dans la pâte et prépare 500 biscuits. Dès que les biscuits sont prêts, Madame Gourmande en choisit un au hasard pour le goûter.

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de raisins dans le biscuit.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 pépites de chocolat.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 2 morceaux (raisins ou pépites de chocolat).

1.8. Exercice

1. Nadine part à la cueillette des champignons. Elle ne sait pas faire la différence entre un champignon comestible et un champignon toxique. On estime que la proportion de champignons toxiques se trouvant dans les bois s'élève à 0,7.

(a) Nadine ramasse 6 champignons au hasard. Calculer la probabilité qu'elle ramasse exactement 4 champignons toxiques.

(b) Nadine invite Serge à une cueillette. Serge connait bien les champignons ; sur 10 champignons qu'il ramasse, 9 sont comestibles. Ce jour-là, il ramasse 4 champignons et Nadine en ramasse 3. Calculer la probabilité que tous les champignons soient comestibles.

2. Serge cueille en moyenne 12 champignons par heure.

(a) Calculer la probabilité qu'il ramasse exactement 8 champignons en une heure.

(b) Calculer la probabilité qu'il ramasse au moins 1 champignon en 2 0 minutes.

1.9. Exercice

Les ingénieurs du son préposés à la sonorisation d'un concert en plein air hésitent entre deux solutions : 4 haut-parleurs de 4 000 watts chacun ou 2haut parleurs de 8 000 watts chacun. On suppose que la probabilité qu'un hautparleur tombe en panne est égale à p = 0,2 indépendamment du type de haut-parleur et que les pannes se produisent indépendamment les unes des autres. En admettant que le concert peut se dérouler avec au moins 8 000 watts, quelle solution conseillerez-vous à ces ingénieurs?

1.10. Exercice (probabilités conditionnelles)

Dix chasseurs guettent le passage d'un vol de canards. Lorsque les canards passent en groupe, les chasseurs font tous feu en même temps mais chacun choisit sa cible au hasard indépendamment des autres. On admet que chaque chasseur touche son canard avec la même probabilité p.

1. Combien de canards, en moyenne, survivront au tir lorsque le vol se compose de 20 canards? Calculer cette moyenne pour diverses valeurs de p.

2. Quel sera le nombre de canards touchés si le vol se compose d'un nombre de canards suivant une loi de Poisson de paramètre 15?

1.11. Exercice (probabilités conditionnelles)

Chacun des soldats d'une troupe de 500 hommes est porteur d'une certaine maladie avec probabilité 1/1 000. Cette maladie est détectable à l'aide d'un test sanguin et, pour faciliter les choses, on ne teste qu'un mélange du sang des 500 soldats.

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif, indiquant par là qu'au moins une des personnes est malade?

2. On suppose que le test a été positif. Quelle est la probabilité que dans ce cas, plus d'une personne soit malade?

1.12. Exercice

A l'université, le taux de blocage de mâchoire provoqué par un bâillement profond est de 1 personne pour 1 000 et par mois. On suppose qu'un étudiant a au plus un blocage de mâchoire par mois et que les blocages de mâchoire sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'en un mois de l'année académique 2005-2006 il y ait 3 blocages de mâchoire ou plus parmi les étudiants de l'université? Indication : supposer qu'il y a 4 000 étudiants.

2. Quelle est la probabilité qu'au cours de l'année académique 2005-2006 le nombre de mois comptant 3 blocages de mâchoire ou plus soit supérieur ou égal à 4? Indication : supposer qu'une année académique est constituée de 8 mois.

3. Le premier mois de l'année académique étant appelé mois 1, quelle est la probabilité que le premier mois où l'on enregistre 3 blocages de mâchoire ou plus soit le mois i, i = 1, 2, ..., 8?

1.13. Exercice

Un jeu de dés très populaires dans les bars anglais est le chuck-a-luck. Il consiste pour la banque à jeter 3 dés. Un joueur peut parier sur n'importe quel résultat compris entre 1 et 6. Si exactement un de ces 3 dés montre le chiffre prévu, le joueur récupère sa mise plus un montant équivalent. Si 2dés montrent ce résultat, le gain net est de 2pour 1 ; si les 3 dés indiquent le chiffre prévu, le gain net est de 3 pour 1. Si aucun dé ne montre le chiffre choisi par le joueur, ce dernier perd sa mise.

1. Calculer l'espérance de gain lorsque l'enjeu est d'une livre.

2. Quel montant devrait recevoir le joueur si les 3 dés montrent le chiffre prévu pour que le jeu soit faire (c'est-à-dire pour que l'espérance de gain soit nulle)

1.14. Exercice

On observe l'arrivée de personnes à un guichet, 2 personnes ne pouvant arriver en même temps. Le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps de longueur t est une variable aléatoire N(t) distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λt. Les arrivées se produisent indépendamment les unes des autres. On choisit un temps t0 = 0. Soit Tk la variable aléatoire qui représente l'arrivée du kème client à partir de t0.

1. Quelle est la loi de T1? Indication : la probabilité que T1 soit supérieur à t est égale à la probabilité que personne n'arrive dans l'intervalle [0, t].

2. Calculer la fonction de répartition de Tk.

3. Calculer la densité de Tk. De quelle loi s'agit-il?

1.15. Exercice

Andi va skier et emprunte une des N perches d'un remonte-pente. Entre cet instant et la prochaine remontée, le nombre de skieurs qui se présentent suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité pour Andi de reprendre la même perche?

1.16. Exercice (Loi géométrique de Pascal, probabilités conditionnelles)

On considère une série d'épreuves indépendantes. A chaque épreuve, on observe un « succès » avec probabilité p et un « échec » avec probabilité $1 - p$. Soit X la variable aléatoire discrète suivante : X = nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le 1er « succès ».

1. Calculer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire $P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$. Cette loi est dite loi géométrique.

2. Vérifier que $E(X) = 1/p$.

3. Vérifier la propriété « sans mémoire » de la loi géométrique $P(X > k \mid X > j) = P(X > k - j)$, $k > j$.

4. J'ai décidé de vendre ma maison et d'accepter la 1re offre d'achat supérieure à K e. On suppose que les offres d'achat sont des variables aléatoires indépendantes avec fonction de répartition F. Soit N la variable aléatoire discrète N= « nombre d'offres d'achat reçues avant de vendre la maison». Donner la loi de probabilité de N, c'est-à-dire $P(N = n)$, $n \in \mathbb{N}$

1.17. Exercice (loi hypergéométrique)

On considère une urne avec N boules dont r sont rouges et $N - r$ sont noires. On tire n boules au hasard sans remise. Soit X la variable aléatoire discrète suivante X = « nombre de boules rouges parmi les n boules tirées ».

1. Calculer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire $P(X = k)$ pour $k = 0, \dots, \min(n, r)$.

2. Cette loi est dite loi hypergéométrique. Son espérance est $E(X) = np$ et sa variance est $var(X) = np(1 - p)(N - n)/(N-1)$, où $p = r/N$. Comparer intuitivement avec la loi binomiale.

TD05_ VARIABLE ALEATOIRES CONTINUES

1.1. Exercice

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f(x).

1. Démontrer que $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
2. Démontrer que $\mathrm{var}(aX) = a^2\mathrm{var}(X)$

1.2. Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in]1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. A l'aide de propriétés géométriques simples, calculer l'aire sous la courbe représentative de f.
3. Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

Que représente la valeur numérique de cette intégrale ?

4. Prouver que la fonction f définie bien une densité de probabilité.
5. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité.

Calculer $P(X < 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(X > 1/2)$ et $P(X \leq 3/4 | X > 1/2)$.

6. Calculer E[X] et V[X].
7. Calculer la quantile d'ordre α pour α ∈ (0, 1). En déduire la valeur de la médiane, du premier puis du troisième quartile.

1.3. Exercice

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Calculer la valeur de c.
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Calculer E(X).

1.4. Exercice

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\ pour\ x\epsilon\mathbb{R}$

1. Montrer que f définie une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à f.

1.5. Exercice

Soit *X* une variable aléatoire dont la fonction de densité est $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Quelle est la fonction de répartition de *X* ?
2. Calculer *E*(*X*).
3. Calculer Var(*X*)

1.6. Exercice

Tous les jours, Sébastien parcourt le même trajet de 40 km pour se rendre à son travail. Sa vitesse est une variable aléatoire V qui dépend des conditions météorologiques et de la circulation.

Sa densité est de la forme $f(x) = \begin{cases} C.v.\exp(-\lambda v) & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$. Sébastien roule à une vitesse moyenne de 80 km/h.

1. Déterminer les valeurs de C et de λ.
2. La durée du trajet est décrite par la variable T = 40V . Déterminer la densité et l'espérance de T.

1.7. Exercice

La fonction de densité de X, variable aléatoire représentant la durée de vie en heures d'un certain composant électronique, est donnée par $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{si x} > 10 \\ 0 & si \;\; \mathrm{x} \leq 10 \end{cases}$

1. Trouver P(X > 20).
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Quelle est la probabilité que parmi 6 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins 15 heures? Quelles hypothèses faites-vous?
4. Calculer E(X).

1.8. Exercice (Long)

La durée de fonctionnement d'un composant électronique, exprimée en jours, est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est définie par : $f(t) = at^2e^{-bt} \; \mathbb{1}_{[0;\,+\infty[} \; (t)$ où b est un réel strictement positif.

Calculer a et b sachant que l'espérance de X est égale à 100 jours.

1.9. Exercice (avec évènement indépendants)

La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en 1 journée est une variable aléatoire X de fonction de densité $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{cx} & \text{si x} \in [0,3] \\ \mathrm{c}(6-\mathrm{x}) & \text{si x} \in]3,6] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Calculer la valeur de c.
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Soit A l'événement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur à 300 kg ». Soit B l'événement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 150 et 450 kg ». Les événements sont-ils indépendants?

1.10. Exercice (probabilités conditionnelles)

Soit f la fonction définie par $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{k}\exp(-\mathrm{x}/2) & \text{si x} \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Quelles sont les conditions requises pour que la fonction f soit une densité de probabilité ? En déduire la valeur de la constante k.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer P(X < 3).
4. Calculer E[X].
5. Calculer P(5 ≤ X < 7|X > 3)

1.11. Exercice

La proportion des gens qui répondent à une sollicitation par mail est une variable aléatoire continue dont la loi de densité est $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \frac{2(\mathrm{x}+2)}{5} & \text{si } 1 > \mathrm{x} \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Montrer que Calculer P(0 ≤ X < 1)=1.
2. Trouver la probabilité tel plus de ¼ mais moins de ½ des gens contactés répondent à ce type de sollicitation
3. Quelle proportion moyenne d'individus peut-on espérer qu'ils répondent à une certaine sollicitation.

TD06 - LOIS CONTINUES USUELLES

1.1. Exercice (Loi uniforme)

A partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0,30]. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus? Qu'il l'attende plus de dix minutes?

1.2. Exercice (Loi uniforme)

Dans un parc national, un guide propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil. Le temps d'attente du groupe T, en heures, avant l'arrivée des animaux, suit une loi uniforme sur [0;1].

Calculer les probabilités suivantes :1) p T (> 0,5) 2) p T (0, 2 0,6 < <) 3) p T (= 0,6)

1.3. Exercice (Loi uniforme)

Soit X la variable aléatoire uniforme continue sur [0 ; 1] et λ un réel strictement positif. Démontrer que la variable Y définie par ´ $Y = -ln\,(X)/\lambda$ suit la loi exponentielle de paramètre λ

1.4. Exercice (Loi exponentielle)

Une variable T soit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

1) Trouvez le paramètre de cette loi sachant que $P(T \leq 70)=0{,}05$ 2) Déduisez-en $P(T > 30)$

1.5. Exercice (Loi exponentielle et sachant)

Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$.

1) Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?

2) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé neuf heures ?

1.6. Exercice (Loi exponentielle et composition)

Soit V ~U ([0,1]). Calculer la fonction de repartition de $W = -\frac{1}{\lambda}\ln(V)$ et sa densité. De quelle loi s'agit-il?

1.7. Exercice (Loi exponentielle)

La durée de vie X en années d'une télévision suit une loi exponentielle de densité f(x) = 1 8e− x8 x ≥ 0.

1. Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.

2. Vous possédez une telle télévision depuis 2ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant ? Conclusion.

3. Quelle est la durée de vie moyenne E(X) d'une télévision? Et la variance de cette durée de vie?

1.8. Exercice (Loi exponentielle)

Le temps d'attente pour recevoir un certain service est distribué selon une loi exponentielle de moyenne égale à 5 minutes.

1. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes ?

2. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 minutes étant donné qu'on a déjà attendu 5 minutes ?

1.9. Exercice (Loi exponentielle)

La durée de vie d'une pièce mécanique est distribuée selon une loi exponentielle dont le taux de défaillance est 0.002 pièce par heure de fonctionnement.

1. Quelle est l'expression de la loi de probabilité pour la variable aléatoire "durée de vie" ?
2. Quelle est la moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF) de cette pièce ?
3. Quelle est la variance de la durée ?
4. Quelle est la probabilité que cette pièce survive au-delà de sa MTBF ?
5. Sachant que cette pièce fonctionne depuis au moins 500 heures, quelle est la probabilité qu'elle dure encore au moins 200 heures ?

1.10. Exercice (Loi normale)

On considère une variable aléatoire $Z \sim N(0, 1)$. Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(Z < 1, 47)$. 2. $P(Z < 1/3)$. 3. $P(Z \geq 0, 21)$. 4. $P(Z < -2, 52)$. 5. $P(Z > -0, 74)$.
6. $P(-1, 2 < Z < 2, 47)$ 7. $P(-2, 52 < Z < 2, 52)$ 8. $P(60 < Z < 80)$. 9. $P(Z < 0)$. 10. $P(|Z - 1, 52| < 1)$.

1.11. Exercice (Loi normale)

1. Soit X la variable aléatoire de loi normale centrale réduite N(0, 1).

(a) Calculer $P(X > 1.56)$, $P(X <0.75)$, $P(X <0.3)$, $P(|X| < 1.5)$

(b) Déterminer dans chaque cas le nombre t qui vérifie

$P(X < t) = 0.5$ $P(X < t) = 0.9664$ $P(X < t) = 0.8$

$P(X > t) = 0.1$ $P(|X| < t) = 0.95$ $P(|X| >t) = 0.01$

2. Soit Y la variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 0,5. ´

Calculer $P(X < 6)$, $P(X > 5)$, $P(X < 3.5)$, $P(4 < X < 6)$, $P(|X -5| > 0.5)$

1.12. Exercice (Loi normale)

Soit $Z \sim N(0, 1)$. Résoudre les équations suivantes :

1. $P(Z < x) = 0, 9 \Longrightarrow x =?$ 2. $P(Z < x) = 0, 88 \Longrightarrow x =?$ 3. $P(Z < x) = 0, 5 \Longrightarrow x =?$
4. $P(Z < x) = 0, 2 \Longrightarrow x =?$ 5. $P(Z > x) = 0, 657 \Longrightarrow x =?$ 6. $P(-x < Z < x) = 0, 98 \Longrightarrow x =?$
7. Déterminer les quartiles de cette loi.

1.13. Exercice (Loi normale)

Soit $X \sim N(6; 1, 32)$. Déterminer les quartiles de cette loi.

1.14. Exercice (Loi normale)

La longueur des pièces produites par une machine de type A varie selon une loi normale avec espérance 8 mm et variance 4 mm, et la longueur de celles produites par une machine de type B varie selon une loi normale avec espérance 7,5 mm et variance 1 mm.

1. Si vous voulez produire des pièces de longueurs 8 ± 1 mm, quel type de machine choisiriez-vous?
2. Si la moyenne des longueurs produites par la machine A reste 8 mm, quelle doit être sa variance pour qu'elle ait la même performance que la machine B?

1.15. Exercice (Loi normale)

On suppose que la taille, en centimètres, d'un pygmée âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de paramètres μ=140 et σ = 6.

1. Quel est le pourcentage de pygmées de 25 ans ayant une taille supérieure à 150 cm?
2. Parmi les pygmées mesurant plus de 145 cm, quel pourcentage dépasse 150 cm?

1.16. Exercice (Loi normale avec sachant)

Soit $Z \sim N(m, \sigma^2)$. Sachant que $P(Z \leq 0, 22) = 0, 04$ et que $P(Z \geq 5, 2) = 0, 23$, déterminer les valeurs de m et σ.

1.17. Exercice (Loi normale avec sachant)

Le samedi soir, la police fait un alcootest à tous les conducteurs qui passent par une route principale. Quelle est la proportion d'automobilistes recevant une amende (taux d'alcool > 0,08 %) si l'on suppose que le taux d'alcool chez les automobilistes est distribué selon une loi normale d'espérance μ = 0,07 % et d'écart-type σ = 0,01 %? En plus de l'amende, les conducteurs ayant plus de 0,09 % ont un retrait de permis. Parmi les automobilistes réprimandés, quelle est la proportion de retraits de permis?

1.18. Exercice (Loi normale)

Sur une route principale o` u la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobiles pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées selon une loi normale avec une moyenne de 72km/h et un écart-type de 8 km/h, répondez aux questions suivantes.

1. Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse?
2. Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de 30 km/h implique un retrait de permis, quelle est la proportion des conducteurs qui vont se faire retirer le permis parmi ceux qui vont avoir une amende?

1.19. Exercice (Loi du Khi-2 et composition)

Soit $X \sim N(0,1)$ et définissons $Y = X^2$.

Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité. Représenter graphiquement cette densité.

Cette distribution est appelée une loi de χ_1^2 1 (Khi-2 à un degré de liberté).

1.20. Exercice (Loi du Khi-2)

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi du khi-2 à 7 degrés de liberté.

1. Déterminer les nombres x tels que

(a) $P(X \geq x) = 0, 01$. (b) $P(X \leq x) = 0, 5$. (c) $P(X \leq x) = 0, 7$. (d) $P(X \leq x) = 0, 05$. (e) $P(X \leq x) = 0, 995$.

2. Déterminer les nombres α tels que

(a) $P(X \leq 1, 24) = \alpha$ (b) $P(X \leq 4{,}255) = \alpha$ (c) $P(X \leq 12{,}02) = \alpha$ (d) $P(X \geq 3{,}82) = \alpha$ (e) $P(1{,}69<X< 6{,}346) = \alpha$.

1.21. Exercice (Loi de Student)

Soit T une variable aléatoire distribuée selon une loi de Student à 16 degrés de liberté.

1. Déterminer les nombres t tels que

(a) $P(T \leq t) = 0, 75$. (b) $P(T \leq t) = 0, 9$. (c) $P(T \geq t) = 0, 75$. (d) $P(T \geq t) = 0, 6$. (e) $P(T \leq t) = 0, 9925$.

2. Déterminer les nombres α tels que

(a) $P(T\leq 1{,}337) = \alpha$. (b) $P(T< 3{,}686) = \alpha$. (c) $P(T\leq 3{,}25) = \alpha$. (d) $P(T \geq 0{,}865) = \alpha$. (e) $P(0{,}535 \leq T< 1{,}746) = \alpha$.

1.22. Exercice (Loi de Weibull)

Un dispositif électronique est utilisé dans la fabrication d'un système aéronautique. La durée jusqu'à défaillance, notée T, est distribuée selon une loi de Weibull avec α=3000 heures et β=2, le paramètre de position étant nul.

1. Ecrire la densité de probabilité de T

2. Déterminer la fonction de répartition de T.

3. Calculer la probabilité qu'un dispositif de ce type, choisi au hasard, présente une durée jusqu'à défaillance supérieure à 4800 heures.

4. Sachant qu'un tel dispositif fonctionne depuis au moins 2000 heures sans défaillance, calculer la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 500 heures.

5. On suppose que trois de ces dispositifs électroniques opèrent indépendamment dans un système aéronautique. Déterminer la probabilité qu'exactement un dispositif parmi ces trois soit défaillant avant 4800 heures.

1.23. Exercice (Loi de Weibull)

La durée de vie jusqu'à défaillance (notée X) d'un transistor est régie par une loi de Weibull de paramètres α=20 mois et $\beta = 2$, le paramètre de position étant nul.

1. Donner l'expression de la densité de X.

2. Quelle est la probabilité qu'un transistor de ce type, installé aujourd'hui dans un système électronique, fonctionne encore après 2 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'un transistor de ce type fonctionne entre 15 et 25 mois ?

4. Quelle est la durée de vie moyenne de ce transistor ?

5. Calculer la variance de la variable X.

6. Quelle est la probabilité qu'un tel transistor fonctionne au-delà de $E[X] + \sigma[X]$? et au-delà de $E[X] + 2\sigma[X]$?

1.24. Exercice (Loi Gamma)

Un certain produit d'éclairage est soumis à des essais accélérés pour obtenir rapidement et économiquement des informations concernant la distribution de la durée de vie. On suppose dans la suite que la durée de vie, notée X et exprimée en semaines, est distribuée selon une loi gamma avec une durée de vie moyenne de 4 semaines et une variance de 8 semaines.

1. Déterminer l'expression de la densité de probabilité qui sert de modèle au comportement de la durée de vie de ce produit d'éclairage.

2. Quelle est l'expression de la fonction de répartition de X ?

3. Quelle est la probabilité que la durée de vie de ce produit d'éclairage soit entre 8 et 10 semaines ?

4. La durée de vie médiane est-elle inférieure ou supérieure à 4 semaines ?

5. Quelle est la valeur modale de la distribution de la durée de vie ?

6. On suppose qu'on arrête le test de durée de vie après t semaines. Quelle est la valeur de t de telle sorte que seulement 10% des unités de ce produit d'éclairage seront encore en opération à l'arrêt du test ?

1.25. Exercice (Loi Beta)

Une entreprise fabrique un type de téléviseur. L'ingénieur qualité, en se basant sur l'historique, a modélisé le pourcentage de produit nécessitant une intervention au cours des 12 premiers mois par un loi beta de paramètre α=3 et β=2. Cette variable aléatoire sera notée dans la suite P.

1. Donner la densité de P.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins 80% des nouveaux modèles vendus cette année requièrent une intervention au cours des 12 premiers mois d'utilisation ?

3. Quelle est le pourcentage moyen d'intervention à laquelle l'entreprise doit s'attendre ?

1.26. Exercice (Loi Log-normale)

Une enquête révèle que dans un certain département 10% des revenus individuels sont supérieurs à 30 000 euros par an tandis que 3% des revenus sont inférieurs à 6 000 euros par an. On désigne par R la variable aléatoire représentant le revenu, et l'on suppose que la distribution de cette variable suit une loi log-normale (c'est-à-dire que la variable ln R est distribuée selon une loi normale).

1. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de la loi.

2. En déduire le pourcentage d'individus dont le revenu est compris entre 15 000 et 23 000 euros