PROBABILITES ET SIMULATIONS 1

IUT STID, UE12 M1202

2019-2020

SÉBASTIEN PINEL
sebpinel@gmail.com

Planning du cours

- Cours : 9h
- TD : 18h. (9h de TP)
- TP : 10h, 5 séances de TP (sous R) de 2h.
- Evalutation
  - Interro 1, 1h30. Semaine du 9 au 13 décembre 2019
  - Interro 2, 1h30. Semaine du 13 au 17 janvier 2020
  - Evaluation TP. Semaine du 16 au 20 décembre 2019

Sommaire

1. Evènements, probabilité et variables aléatoires

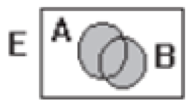
1.1. L'espace des issues, l'ensemble des évènements

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé, le vainqueur d'un match de foot sont des **expériences aléatoires**, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard. A cette expérience aléatoire, on associe **l'ensemble des résultats possibles appelé univers**, noté généralement Ω. Ses éléments sont appelés **éventualités**. Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés **événements**. Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires.** Étant donné un univers Ω, l'événement Ω est l'**événement certain**. **L'ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'événement impossible.

Exemples :
- Match PSG-OM : Ω="PSG gagne, OM gagne, match nul". Donc Ω est compose de trois évènements élémentaires. Un exemple d'évènement est A= "PSG ne gagne pas".
- On lance un de : Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}. On peut s'intéresser à l'évènement A="on obtient un chiffre pair", i.e. A={2, 4, 6}.
- On lance deux des : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(i;\ j) : 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\}$. Ici, un Évènement élémentaire ω est un couple (i; j), où i représente le résultat du premier de et j celui du second.
- On lance trois fois une pièce de monnaie. Les évènements élémentaires vont décrire le plus précisément possible le résultat de cette expérience. Donc un évènement élémentaire ω est un triplet (r_1, r_2, r_3) qui donne les résultats des trois lancers dans l'ordre. L'évènement B : "on obtient pile au deuxième lancer" est B={(f, p, f), (f, p, p), (p, p, f), (p, p, p)}
L'évènement B est réalisé si on obtient l'un des évènements élémentaires listes ci-avant. Il n'est parfois pas nécessaire de connaître tous ces détails. On pourra choisir : ω représente le nombre de "face" obtenus. Alors, Ω={0, 1, 2, 3}. Le modèle est beaucoup plus simple, mais ne permet pas de décrire des évènements tels que B.

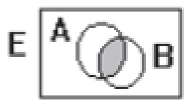
En théorie des probabilités, on a souvent besoin de ramener le calcul de la probabilité d'un évènement au calcul de la probabilité de l'**union** ou de l'**intersection** d'événements plus élémentaires, on introduit donc les notations suivantes : Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on note

A ∪ B={ω; ω ∈ A ou ω ∈ B} : "A ou B se réalise"



A∪B

A ∩ B={ω; ω ∈ A et ω ∈ B} : "A et B se réalisent"

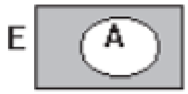


A∩B

A \B={ω; ω ∈ A et ω / ∈ B} : ”A se réalise mais pas B”

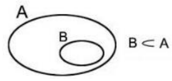
A - B

$\bar{A}$= E \ A : “l'évènement A ne se réalise pas”



$\bar{A} = C_E(A)$

$B \subset A$: “B inclus dans A”

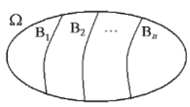


Deux évènements A et B de E sont **disjoints** ⇔A et B n'ont aucune issue en commun
⇔A ∩ B=∅.

<u>Remarque :</u> A et $\bar{A}$ sont disjoints, ainsi que ∅ et A.

<u>Exemple :</u> On considère un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est équilibré, ce qui veut dire que les 6 faces ont la même chance de sortir. L'ensemble **Ω** des issues possibles d'un lancer est **Ω**={1, 2, 3, 4, 5, 6}, soit A={2, 4, 6}, B={5, 6}, C={3}, on a :
1. A ∪ B={2, 4, 5, 6}
2. A ∩ B={6}
3. A ∩ C=∅
4. $\bar{A}$= {1, 3, 5}, $\bar{A}$ correspond à l'évènement ”on obtient un nombre impair”.
5. A \B={2, 4} on remarque que A \ B=A ∩ B

<u>Définition :</u> Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements,
$(B_i)_{i\in I}$ est une **partition de Ω**
⇔ (i) $\bigcup_{i\epsilon I} B_i = \Omega$
(ii) les Ai sont deux à deux incompatibles : pour tous i ≠ j, $B_i \cap B_j=\emptyset$.



1.2. Définition et propriétés d'une probabilité

On commence par définir ce qu'est une probabilité :
<u>Définition :</u> Une **probabilité P sur Ω** est une fonction de Ω dans l'intervalle [0, 1] telle que
1. P (Ω)=1,
2. Si $(Ai)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints (i.e. Ai∩Aj=∅ si i ≠j), alors $P(\bigcup_{i\epsilon I} A_i) = \sum_{i\epsilon I} P(A_i)$

<u>Exemple :</u>
Reprenons l'exemple précédent, étant donné que le dé est équilibré on pense pour ce cas à une probabilité comme à une fonction p sur Ω, telle que p(1) + ... + p(6)=1 et on associe à chaque

issue la probabilité 1/6. En utilisant le second point de la définition d'une probabilité on calcule facilement la probabilité de l'évènement A =”on obtient un nombre pair”. En effet A={2} ∪ {4} ∪ {6}, les 3 issues qui composent A étant 2 à 2 disjointes 1, P(A)=P(2) + P(4) + P(6)=1/6 + 1/6 + 1/6=1/2.

Exemple : probabilité uniforme
On dit qu'il y a **équiprobabilité** (ou **probabilité uniforme**) quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité. La probabilité d'un évènement A se calcule facilement :

$$P(A) = \sum_{\omega \epsilon A} P(\omega) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Remarque : Les expressions suivantes « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables » … indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.
En général, l'équiprobabilité nécessite l'utilisation de techniques de dénombrement dont un rappel est disponible à l'annexe A

Proposition :
1. P(∅)=0.
2. Pour tout événement A, P(A) + P($\bar{A}$)=1.
3. Pour tous événements quelconques A et B, P(A ∪ B)=P(A) + P(B) − P(A ∩ B).
4. Pour tous événements disjoints A et B, P(A ∪ B)=P(A) + P(B).
5. Si A et B sont deux événements tels que A ⊆ B alors P(A) ≤ P(B)

Exemple : On considère un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est équilibré, soit A={2, 4, 6}, B={5, 6}, C={3}, calculons de deux façons différentes :
1. A∪B={2, 4, 5, 6}, on a donc P(A∪B)=P({2, 4, 5, 6}) et comme chacun des évènements {2}, {4}, {5} et {6} sont deux à deux disjoints, P(A∪B)=P(2)+P(4)+P(5)+P(6)=4/6 =2/3.
2. On a vu dans l'exemple précédent que P(A)=1/2.
Il est facile de voir que P(B)=1/6+1/6 =1/3 et A∩B={6} et donc que P(A∩B)=1/6.
Ainsi on obtient P(A∪B)=P(A)+P(B)−P(A∩B)=1/2+1/3−1/6=2/3.

On est maintenant en mesure de modéliser des expériences aléatoires simples, c'est-à-dire :
- choisir Ω,
- choisir une probabilité sur Ω en justifiant ce choix.

Attention, pour décrire une probabilité, il faut donner P(A) pour tout $A \subset \Omega$. Ou alors, on peut plus simplement donner $P(\omega)$ pour tout $\omega \epsilon \Omega$. On déduira P(A) pour tout A d'après la définition d'une probabilité.

1.3. Conditionnement et indépendance

1.3.1. Conditionnement

Introduction : Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?
Information supplémentaire : vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. Cette information va changer la probabilité. L'outil qui permet cette mise à jour est la probabilité conditionnelle.

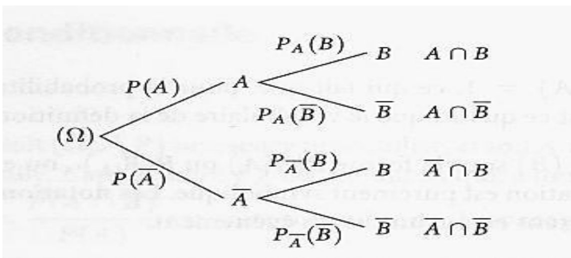
Définition : Etant donnes deux évènements A et B, avec P(A) > 0, on appelle **probabilité de B conditionnellement à A**, ou sachant A, la probabilité notée **P(B/A)** ou $\boldsymbol{P_B(A)}$ définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Remarque : Soit A et B deux évènement de probabilités non nulles.
1-P($A \cap B$)=$P_B(A) \times P(B)$ 2-P($A \cap B$) =$P_A(B) \times P(A)$
De plus, la probabilité conditionnelle sachant A, $P_A(.)$, est une nouvelle probabilité et possède donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Exemple : Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ?
Choisissons **Ω** décrivant les résultats de l'expérience : $\Omega = \{rouge, verte\} \times \{rouge, verte\}$
Un évènement élémentaire est un couple (x; y) où x est la couleur de la première boule tirée et y la couleur de la seconde. Soit A l'évènement "la première boule est rouge" et B l'évènement "la seconde boule est rouge".
P($A \cap B$)=$P_A(B) \times P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \times \frac{r}{r+v}$

Les arbres pondérés :
Règle des nœuds : La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.



Proposition : (Formule des probabilités totales) Soit A un évènement tel que 0<$P(A)$ < 1. Pour tout évènement B, on a $P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$

Proposition : (Formule des probabilités totales généralisée) Soit $(Ai)_{i\in I}$une partition de **Ω** telle que P(Ai)>0 pour tout $i\epsilon I$, alors, pour tout évènement B, $P(B) = \sum_{i\epsilon I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)$

Exemple : Reprenant l'exemple précédent, quelle est la probabilité pour que la seconde boule tirée soit rouge ?
On garde le même formalisme.
$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$=$\frac{r-1}{r+v-1} \times \frac{r}{r+v} + \frac{r}{r+v-1} \times \frac{v}{r+v} = \frac{r}{r+v}$

La formule des probabilités totales permet de suivre les étapes de l'expérience aléatoire dans l'ordre chronologique. Nous allons maintenant voir une formule à remonter le temps...

<u>Proposition :</u> (Formule de Bayes) Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle, alors on a : $P_B(A) = \frac{P_A(B)\times P(A)}{P_A(B)\times P(A)+P_{\bar{A}}(B)\times P(\bar{A})}$

<u>Proposition :</u> (Formule de Bayes généralisée) Soit $(Ai)_{i\in I}$une partition de Ω telle que P(Ai)>0 pour tout $i\epsilon I$, soit un évènement B tel que P(B)>0, alors,

pour tout $i\epsilon I$, $P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)\times P(A_i)}{\sum_{j\epsilon I} P_{A_j}(B)\times P(A_j)}$

<u>Exemple :</u> Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ?

Arbre associé

Soient les évènements :
T_A ="le tableau est entre par A", $T_B=\overline{T_A}$="le tableau est entre par B",
F ="le tableau comporte des fautes". D'après le théorème de Bayes :

$$P_F(T_A) = \frac{P_{T_A}(F)\times P(T_A)}{P_{T_A}(F)\times P(T_A) + P_{T_B}(F)\times P(T_B)}$$
$$= \frac{0.052\times 1/3}{0.052\times 1/3 + 0.067\times 2/3} = 0.279$$

1.3.2. Indépendance

Intuitivement : deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre.

<u>Définition :</u> A et B sont 2 événements de probabilité non nulle. A et B sont **indépendants**

$$\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$$

<u>Exemple :</u> On s'intéresse à deux lancés d'un dé. On suppose que ces deux lancés sont indépendants, i.e. que le résultat du lancé du premier dé n'a aucune influence sur le lancé du second dé. Ainsi les événements A={On obtient 2 au premier lancé} et par exemple B={On obtient 5 au second lancés} sont indépendants. En terme de probabilité cela se traduit par : $P(A\cap B) = P(A)P(B) = (1 \setminus 6)\times(1 \setminus 6)$.

<u>Proposition :</u> Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants

$\Leftrightarrow$ P(A∩B)=P(A)P(B).

Remarque : Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles. La notion d'indépendance dépend de la probabilité sur l'univers, celle d'incompatibilité est purement ensembliste
2 événements A et B sont indépendants ⇔ $P(A\cap B)= P(A)P(B)$
2 événements A et B sont incompatibles ⇔ $A\cap B= \emptyset$, et on a alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

1.4. Variables aléatoires

Le travail sur les évènements devient vite fastidieux, ainsi nous allons maintenant nous restreindre à étudier des grandeurs numériques obtenues pendant l'expérience aléatoire.

Définition :
Une fonction X sur Ω à valeurs réelles est appelée **variable aléatoire réelle**. $X: \Omega \to \mathbb{R}$
$A \mapsto X(A)$

Exemple :
On lance simultanément deux dés, $\Omega=\{(i, j) \text{ avec } 1\leq i\leq 6 \text{ et } 1\leq j\leq 6\}$. On définit $X(i, j)=i+j$. X est une variable aléatoire discrète (on peut dénombrer ses valeurs).
On prend un individu au hasard dans une population, on s'intéresse à la variable taille définit X(i)=taille de l'individu i. X est une variable aléatoire continue (on ne peut pas dénombrer ses valeurs).

Notation : Les variables aléatoires seront notées par des lettres majuscules, X, Y, ... Les valeurs qu'elles prennent lorsqu'une issue ω se réalise sont notées par des lettres minuscules. Par exemple on pourra écrire x à la place de X(ω).

Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un **modèle** de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé **probabilité**. Un modèle n'est pas toujours en adéquation avec l'expérience.

Exemple : pour un lancé de dé, soit X la variable aléatoire qui, à un lancé, associe le numéro de la face sortant $P(X =1)=0$, $P(X=2)= 2/6$, $P(X=3)=0$, $P(X=4)=1/6$, $P(X=5)=1/6$, $P(X=6)=4/6$. Par simulation, on vérifie que le modèle posé ne correspond pas à la pratique…

2. Variables Aléatoires Discrètes

2.1. Définitions

Définition : Une variable aléatoire (v.a.) discrète X est une fonction définie sur l'espace fondamental dénombrable Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque évènement élémentaire ω, on associe un nombre X(ω).

Exemple : On lance trois fois une pièce et on s'intéresse au nombre X de fois ou PILE apparait.
Il y a deux manières de formaliser cette phrase. Tout d'abord, à chaque évènement élémentaire ω, on associe X*(*ω*)*. Ainsi,

ω	PPP	PPF	PFP	FPP	FPP	FPF	PFF	FFF
Valeur de X(w)	3	2	2	2	1	1	1	0

Ensuite, comme on observe que plusieurs évènements élémentaires donnent la même valeur, on peut les regrouper et obtenir des évènements (évènement=réunion d'évènements élémentaires) qui correspondent à des valeurs distinctes de X :

k (valeur prise par X)	3	2	1	0
Evènement tel que (X=k)	{PPP}	{PPF, FPP, PFP}	{FFP, PFF, PFPF}	{FFF}

Définition : Soit P une probabilité sur un espace des issues **Ω**. Soit X une variable aléatoire définie sur **Ω**. Lorsqu'à chaque valeur $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X on associe les probabilités p_i de l'événement "X=x_i", on dit que l'on définit **la loi de probabilité** P_X de la variable aléatoire X.

Notation : P(X= x_i) se note également $P_X(x_i)$

Remarque : Pour connaitre la loi d'une variable aléatoire, il faut connaitre l'ensemble de ses valeurs possibles et la probabilité avec laquelle elle réalise chaque valeur. En général, on résume la loi de probabilité par un tableau

Valeurs de X	x_1	x_2	x_3	…	x_m
P(X=x_i)	p_1	p_2	p_3	…	p_m

Exemple : Reprenant l'exemple précédent, nous avons déjà la liste de tous les évènements élémentaires et ils sont équiprobables, de probabilité 1/8. D'après la composition des évènements (X=k), pour k=0; :::; 3, on peut déduire facilement la loi de X.

k (valeur prise par X)	(X =3)	(X=2)	(X=1)	(X=0)
Evènement tel que (X=k)	{PPP}	{PPF, FPP, PFP}	{FFP, PFF, PFPF}	{FFF}
Probabilité	1/8	3/8	3/8	1/8

Un autre outil permet de caractériser la loi d'une v.a. : il s'agit de la fonction de répartition empirique.

Définition :
Soit X une v.a., on appelle **fonction de repartition de X** la fonction définie par
$F_X : \mathbb{R} \to [0; 1]$
$x \to F_X(t) = P(X \leq t)$

Pour une v.a. discrète, la fonction de repartition est une fonction en escalier, avec un saut en chaque valeur k de X(Ω) et la hauteur de ces sauts est la probabilité P(X=k).

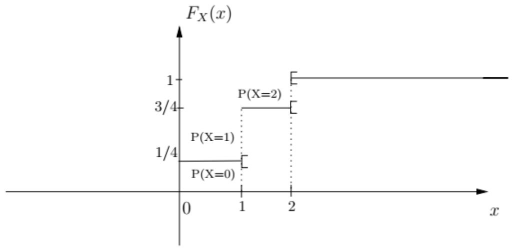


Figure 1. Exemple de fonction de repartition pour une v.a. discrète

Exemple : Reprenant l'exemple précédent, X est le nombre de face quand on lance trois fois une pièce. On a vu que la loi de X est P(X=0)=1/8; P(X=1)= P(X=2)= 3/8; P(X=3)=1/8

$$\text{D'où } F_X(x) = \begin{cases} 0, \; si \; x < 0 \\ 1/8, si \; 0 \leq x < 1 \\ 4/8, si \; 1 \leq x < 2 \\ 7/8, si \; 2 \leq x < 3 \\ 1, si \; 3 \leq x \end{cases}$$

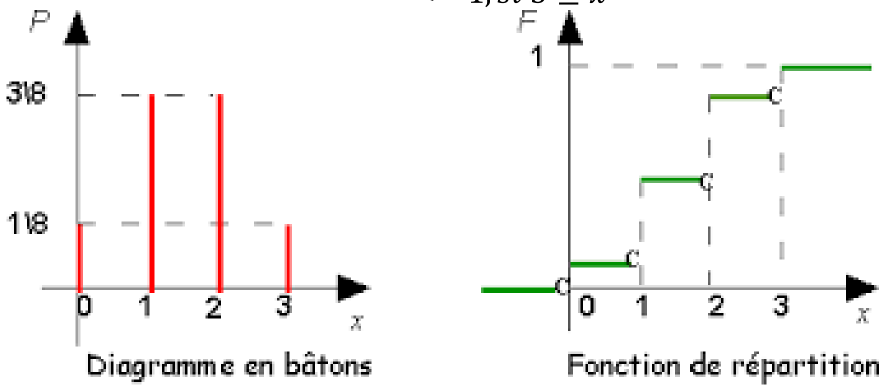


Figure 2. Exemple de trois lancés d'une pièce a) diagramme en bâton des lois de probabilités, b) fonction de répartition

Remarque : deux v.a. ayant même loi ont même fonction de repartition.

Proposition : Soit F_X une fonction de repartition, alors
1) F_X est croissante,
2) F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à P(X<x),
3) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

Une fois la loi d'une v.a. établie, on peut calculer, comme pour une série statistique, un indicateur de position (l'espérance) et un indicateur de dispersion (la variance)

2.2. Espérance d'une v.a. discrète

La moyenne ou espérance est une valeur qui sert à avoir une idée de la valeur typique d'une variable aléatoire. Elle n'est en générale pas suffisante pour comprendre comment se comporte cette variable aléatoire mais donne une première indication. Son avantage est qu'elle est très facile à calculer dans la majorité des cas.

Définition : Soit Ω un espace fini ou dénombrable, P une probabilité sur Ω, et X une variable aléatoire. On appelle **espérance de X** (ou **moyenne de X**) la quantité $E(X) = \sum_{w\epsilon\Omega} X(\omega)P(\omega)$

Exemple : Considérons le jeu suivant, on lance un dé et on définit la variable aléatoire X qui prend la valeur de la face du dé, la loi de X est

Valeurs de X	1	2	3	4	5	6
P(X=xi)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(X) = 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + 6 \times 1/6 = 3$$

Proposition : (Linéarité de l'espérance). Soit a ∈ ℝ, alors

$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Proposition : Soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$E(a) = a$$
$$X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$$
$$X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$$

2.3. Variance d'une v.a. discrète

Comme nous l'avons dit précédemment la moyenne n'est pas suffisante pour avoir une bonne idée du comportement d'une variable aléatoire. La variance mesure un écart (quadratique) moyen de la variable aléatoire par rapport à cette moyenne. On dit qu'elle mesure une dispersion de la variable par rapport à sa moyenne.

Définition : La **variance et l'écart-type** d'une v.a. discrète X sont les réels positifs

$$Var(X) = \mathrm{E}\left(\left(\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}\right)^2\right) = \sum_{k\epsilon\Omega} (k - E(X))^2 P(X=k) = \mathrm{E(X^2)} - (\mathrm{E(X)})^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Exemple: Reprenant l'exemple précédent, X est le nombre de Face quand on lance trois fois une pièce. On a vu que la loi de X est P(X=0)=1/8; P(X=1)= P(X=2)= 3/8; P(X=3)=1/8

$$E(X) = \sum_{k=0}^{k=3} kP(X=k) = 3 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$Var(X) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 = \sum_{k=0}^{k=3} k^2 P(X=k) - (\frac{3}{2})^2 =$$
$$= 3^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 0^2 \times \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = 3/4$$

Proposition : Soit X une variable aléatoire et a ∈ ℝ,
$$var(aX) = a^2 var(X)$$
$$var(X + a) = var(X)$$
$$var(a) = 0$$
$$var(X) = 0 \Leftrightarrow pour\ tout\ \omega \in \Omega\ tel\ que\ P(\omega) > 0, X(w) = E(X)$$

2.4. Lois usuelles discrètes

2.4.1. Loi uniforme

Définition : La **loi uniforme** est la loi de l'absence d'information. Supposons qu'une v.a. X prenne les valeurs {1, 2, ..., n} mais que nous n'ayons aucune idée de la loi de probabilité de X. Dans ce cas, après justifications, on peut affecter à chaque valeur le même poids : 1/n. Et Pour tout k∈ {1, 2, ..., n}, $P(X = k) = \frac{1}{n}$

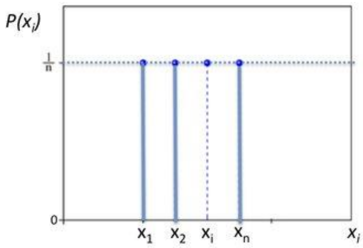


Figure 3. Diagramme en bâton de la loi uniforme discrète

Proposition : Soit X de loi uniforme discrète prenant les valeurs {1, 2, ..., n}, alors on a
$E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$

2.4.2. Loi de Bernoulli

Définition : **une épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S ou 1) et échec (noté E ou 0), de probabilités respectives p et 1 – p. La variable aléatoire X prenant la valeur 1 si S se réalise, 0 sinon a pour loi de probabilité :

Valeurs de X	1	0
P(X=x_i)	p	1-p

Cette loi est **appelée loi de Bernoulli de paramètre p**, et X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, on note X suit $\mathcal{B}(p)$.

Proposition : Soit X ~ $\mathcal{B}(p)$, alors on a E(X)=p et Var(X)=p(1 − p).

Exemples d'épreuves de Bernoulli :
Un jeu de pile ou face classique ~ $\mathcal{B}(1/2)$,
Une urne contient 70 boules rouges et 30 boules noires. Le tirage d'une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès « le tirage d'une boule rouge ». P(X=1)=P(S)=70/100

<u>Définition :</u> Un **schéma de Bernoulli** de paramètre n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques de paramètre p dans des conditions d'indépendance.

2.4.3. Loi binomiale

<u>Définition :</u>
Soient $(X_1, X_2, \cdots, X_n)_{n \in \mathrm{N}}$ variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, chacune de ces variables ayant pour paramètre p, la variable aléatoire S_n définie par $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$ suit **une loi binomiale de paramètres n et p**, on note $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. La loi de S_n est donnée par : pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

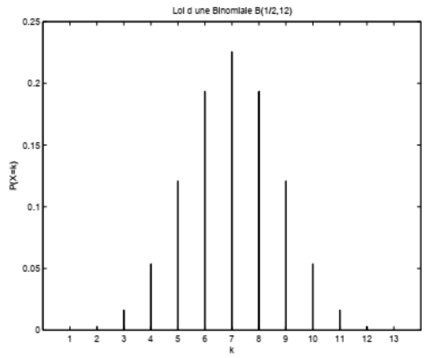


Figure 4. Loi Binomiale B(12,1/2)

<u>Proposition :</u> Soit X$\sim \mathcal{B}(n,p)$, alors on a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

<u>Exemple :</u> On lance 10 fois d'affilée une pièce de monnaie.
Le jeu de pile ou face est une épreuve de Bernoulli, il y a indépendance antre chaque lancé de pièce, ainsi le nombre de pile suit Binomiale de paramètre (10, ½). On note X la nombre de pile, P("avoir 6 pile exactement")=P(X= 6)=$\binom{10}{6} 0.5^6 (1-0.5)^{10-6}$

2.4.4. Loi de poisson

Cette loi est une approximation de la loi binomiale quand np est petit et n grand (en pratique, n≥50 et np≥10).

<u>Définition :</u>
X suit **une loi de Poisson de paramètre λ** (X ~ P(λ)) ⇔ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(X{=}k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

<u>Remarque :</u>
Cette variable aléatoire est différente de toutes celles qui ont été introduites jusqu'à maintenant car elle prend un nombre infini dénombrable de valeurs. On peut vérifier que c'est une mesure de probabilité en montrant que : $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

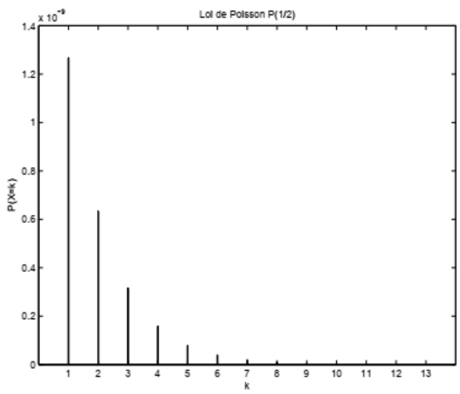


Figure 5. Loi de Poisson P(1/2)

<u>Proposition :</u> Si X ~ P(λ), alors on a E(X)=λ et Var(X)=λ

Exemple : On utilise la loi de Poisson pour modéliser le nombre de tâches qui arrivent à un serveur informatique pendant une minute, le nombre de globules rouges dans un ml de sang, le nombre d'accidents du travail dans une entreprise pendant un an...

Proposition : Pour n "assez grand" (n>30) et pour p voisin de 0 ($p \leq 0{,}1$) tels que $np(1-p) \leq 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson P(λ), où **λ** =np.

2.4.5. Loi géométrique

Lors d'un schéma de Bernoulli, au lieu de réaliser un nombre fixe d'essais, l'expérimentateur s'arrête au premier succès. La valeur qui nous intéresse est le nombre d'essais effectués jusqu'au premier succès inclus. Le nombre de succès est donc fixe à 1, mais le nombre d'essais total Y est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 1.

Définition :
X suit une **loi de géométrique de paramètre *p***, G(p)
⇔ pour tout $k \in N$, on a : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{p}(1-p)^{k-1}$

Remarque :
Une loi géométrique prend un nombre infini dénombrable de valeur avec une probabilité strictement positive. On vérifie que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{p}(1-p)^{k-1} = 1$

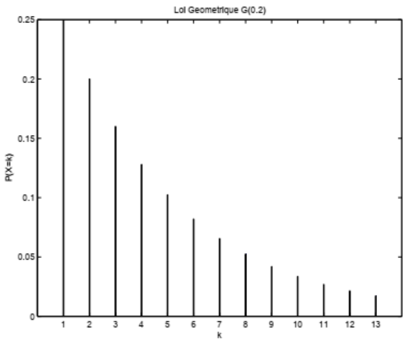


Figure 6. Loi géométrique G(0.2)

Proposition : Si X ~ G(p), alors on a E(X)=1/p et $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3. Variables aléatoires continues

On utilise des v.a. discrètes pour compter des évènements qui se produisent de manière aléatoire, et des v.a. continues quand on veut mesurer des grandeurs "continues" (distance, masse, pression...).

3.1. Loi d'une v.a. continue

Définition : On dira qu'une fonction **f est une densité de probabilité**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_X \text{ est continue sauf en un nombre dénombrable de points,} \\ f_X \text{ positive} \\ \int_{\mathbb{R}} f_X(\mathrm{t})dt = 1 \end{cases}$$

Remarque : Dans la pratique pour vérifier que f_X est une densité de probabilité on vérifie que :
1. f_X est continue sauf en un nombre dénombrable de points
2. f_X est positive
3. $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = 1$.

Exemple : Soients $\lambda \geq 0$ et $f_X(\mathrm{t}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$.
Vérifions que f_X est une fonction de densité.
1. Continuité sauf en un nombre fini de point :

2. f_X est positive car

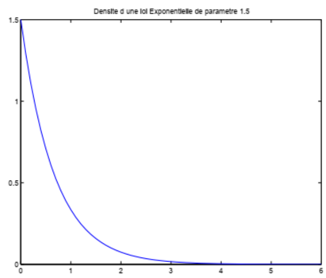


Figure 7. Représentation de la fonction f_X pour le paramètre fixé à 1.5

3. $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f_X(t)dt$
$=$

Définition : On appellera **variable aléatoire continue** X toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}\ (\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ où f_X est une densité de probabilité. On dit que f_X est la densité de probabilité de X.
La fonction définie par F_X : $\mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ est appelée **fonction de répartition** de X.
$$x \rightarrow F_X(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})$$

Important :
La loi d'une v.a. X est donnée par (au choix) :
1. Sa densité f_X
2. Les probabilités $P(a \leq X \leq b)$ pour tous a, b
3. Sa fonction de répartition F_X

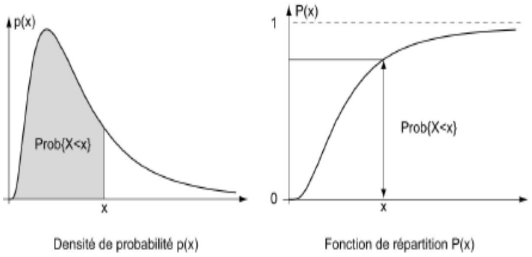


Figure 8. a) Densité de probabilité p(x), b) Fonction de Repartition P(X<x)

Proposition : Si X est de densité f_X, alors
1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X=x)=0$
2. pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$, $P(X \in [x, y]) = \int_x^y f_X(t)dt$

Exemple : Soit la f fonction suivante $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$ Graphe associé

Cette fonction est positive et continue sauf en 0 et en 1 c'est à dire en un nombre dénombrable de points. Donc la condition 1. de la remarque précédente est vérifiée. La condition 2. est également vérifiée sans difficulté. Donc f est donc bien une densité de probabilité.

Calculons la probabilité que X soit comprise entre 1/6 et 1/3, on obtient :

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]\right) = P\,(1/6 \,\leq\, X \,\leq\, 1/3) = \int_{1/6}^{1/3} f_X(t)dt = \int_{1/6}^{1/3} 1\ dt = \ 1/6$$

Proposition : La fonction de repartition F d'une v.a. X de densité f est continue, croissante. Elle est dérivable en tout point x où f est continue et $F_X'(t) = f_X(t)$.
Pour $a \leq b$, on a la relation
$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

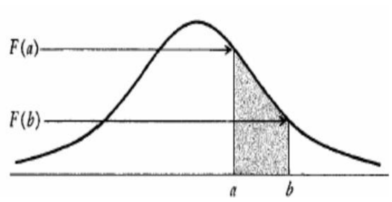


Figure 9. P(a≤X≤b)= P(a<X<b)=F(b)-F(a)

Remarque : $F_X'(t) = f_X(t) \Leftrightarrow F_X$ est une primitive de f_X

3.2. Espérance et variance

Dans ce paragraphe on rappelle des notions que l'on a déjà vues pour des variables aléatoires discrètes.

Définition : Soit X une variable de densité f_X.
1. L'**espérance ou moyenne** est donnée par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt$
2. **Le moment d'ordre 2** est donné par : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt$
3. **La variance** est donné par : $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - E(X)\right)^2 f_X(t)dt$

Proposition: $Var(X) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$

Remarque : Bien entendu ces définitions sont soumises à la condition d'existence des intégrales.

Exemple : Soit la f fonction suivante $f_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{x} \in [0,1] \\ 0 & \text{si } \mathrm{x} \notin [0,1] \end{cases}$

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{t}f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{t}f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \left[\frac{\mathrm{t}^2}{2}\right]_0^1 = 1/2$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{t}^2 f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{t}^2 f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \left[\frac{\mathrm{t}^3}{3}\right]_0^1 = 1/3$$

$$\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \big(\mathrm{E(X)}\big)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Proposition : Soient X et Y deux variables aléatoires continues et soit a ∈ ℝ, alors on a
E(aX)=aE(X),
E(X + Y)=E(X) + E(Y),

3.3. Lien entre discret et continu

	X v.a. discrète	**X v.a. continue**
Ensemble d'arrivée X(Ω)	Ensemble dénombrable	Intervalle I de ℝ
Evènements	Parties de X(Ω)	Parties engendrées par des sous-intervalles de I
Probabilités	$\sum_{w \in \Omega} P_X(\omega) = 1$	$\int_I f_X(t)dt = 1$
Espérance de v.a.	$E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(\omega)P_X(\omega)$	$E(X) = \int_I t f_X(t)dt$
Variance de v.a.	$Var(X) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2$	$Var(X) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2$

3.4. Variables aléatoires continues usuelles

3.4.1. Vocabulaire

Le fractile d'ordre a (O < a < 1) de la loi de X est le nombre Xa tel que: Pr (X < Xa) = a
- Si a = 1/2, Xa est la médiane. La médiane M e vérifie les deux inégalités :
Pr (X< M e) = 0,50 Pr (X > M e) = 0,50
Il existe toujours au moins une valeur médiane, mais elle peut ne pas être unique, il peut même
Fractile particuliers
exister un segment de valeurs médianes.
Si a = 0,25, Xa est le premier quartile et pour a = 0,75, le troisième quarcile. Si a = k/IO (k entier compris entre 1 et 9), les différentes valeurs de xa définissent les déciles.
Si a = k/IOO (k entier compris entre 1 et99), les différentes valeurs de Xa définissent les centiles.

3.4.2. Loi uniforme

Définition :
X suit une **loi uniforme**
⇔ il existe a et b deux réels tels que a < b
et $f_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{b-a}} & \text{si x} \in [\mathrm{a,b}] \\ 0 & \text{si x} \notin [\mathrm{a,b}] \end{cases}$

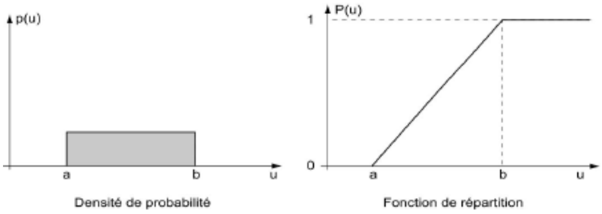


Figure 10. a) Densité d'une loi uniforme, b) Fonction de répartition d'une loi uniforme

Proposition : Si X~$U([a,b])$, alors on a E(X)=(b + a)/2 et Var(X)=$(\mathrm{b} - \mathrm{a})^2$/12

Remarque : La fonction de repartition F_X de X est donnée par : $F_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si x} < \mathrm{a} \\ \frac{\mathrm{x-a}}{\mathrm{b-a}} & \text{si x} \in [\mathrm{a,b}] \\ 1 & \text{si x} > \mathrm{b} \end{cases}$

3.4.3. La loi de Cauchy

<u>Définition :</u>
X suit une **loi de Cauchy** ⇔ pour tout x ∈ ℝ sa densité f est donnée par $f_X(x) \ = \frac{1/}{\pi(1+x^2)}$

<u>Remarque :</u> La fonction $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$ n'étant pas intégrable sur ℝ, X n'a pas d'espérance ni de variance.

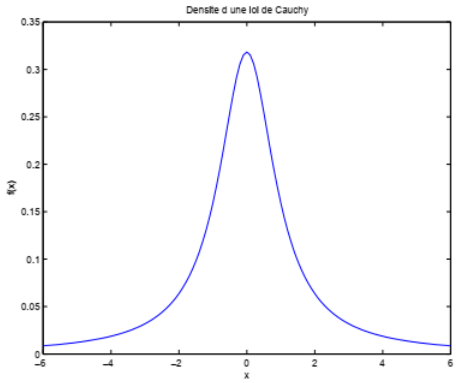


Figure 11. Densité d'une loi de Cauchy

3.4.4. Loi exponentielle

<u>Définition :</u>
X suit une **loi exponentielle de paramètre α**, notée E(λ) ⇔ pour tout x ∈ ℝ sa densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[} (x)$

La v.a. X de loi E(λ) ne prend que des valeurs positives.

Elle est utilisée dans de nombreuses applications :
- durée de fonctionnement d'un matériel informatique avant la première panne,
- désintégration radioactive,
- temps séparant l'arrivée de deux "clients" dans un phénomène d'attente (guichet, accès à un serveur informatique, arrivée d'un accident du travail...).

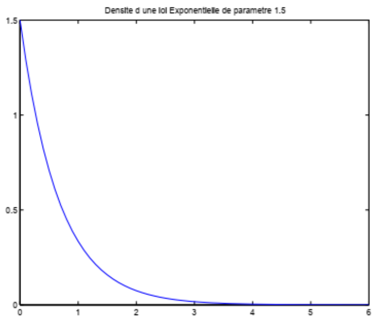


Figure 12. Densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.5

<u>Remarque :</u> Soit X~E(λ), la fonction de répartition est définie comme

$$F_X(\text{t}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

<u>Proposition :</u> Soit X~E(λ), alors on a E(X)=1/λ et Var(X)=1/ λ^2

<u>Proposition :</u> La loi exponentielle vérifie la propriété d'absence de mémoire (de vieillissement) : Soit X un v.a. de loi exponentielle E(λ), alors pour tous s, t > 0, P(X > t + s/X > t)=P(X > s)

<u>Remarque :</u> la loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains ? A priori, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raisonnablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on ne peut pas en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque *s* est tout petit. Ainsi, la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l'âge. Cette loi s'applique plutôt à des composant électronique (ampoules, transistor)

3.4.5. Loi normale

C'est la loi la plus importante. Son rôle est central dans de nombreux modèles probabilistes et dans toute la statistique. Elle possède des propriétés intéressantes qui la rendent agréable à utiliser.

Définition :
X suit une **loi normale réduite centrée** $\mathcal{N}(0,1)$
⇔ pour tout x ∈ ℝ, sa densité f est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

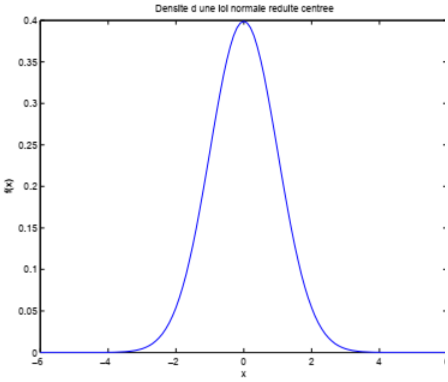


Figure 13. Densité de la loi normale réduite centrée

La courbe de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ porte le nom de "courbe en cloche". Elle tend vers 0 en l'inflni, est croissante sur $\mathbb{R}^-$puis décroissante. Elle admet donc un maximum en 0. On peut voir aussi qu'elle est symétrique, de centre de symétrie 0.

Remarque : si X ~$\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tous a < b,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \in [a, \mathrm{b}]) = \mathrm{P}\ (\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{dt} = \varphi(\mathrm{b}) - \varphi(\mathrm{a})$$

où φ est la fonction de repartition de X.

Rappelons que φ une primitive de la densité f_X. Mais il n'existe pas de forme analytique de la primitive de f_X. On doit donc lire les valeurs de φ dans une table disponible en annexe B, ou la faire calculer par un logiciel adapté (e.g. excel, matlab, R).

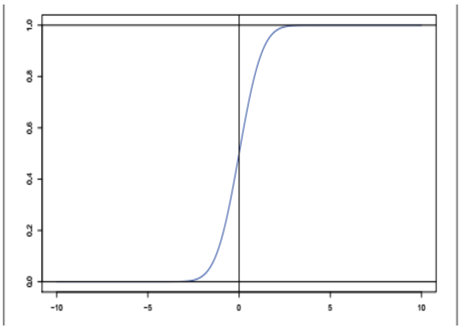


Figure 14. Fonction de répartition de la loi normale réduite centrée

Proposition : Si X~ $\mathcal{N}(0,1)$, alors on a E(X)=0 et Var(X)=1

Remarque :
une v.a . X est **centrée** ⇔X est de moyenne nulle
une v.a . X est **réduite** ⇔X est de variance 1

On définit maintenant une loi normale de moyenne m et variance σ^2 quelconque :
Définition : X suit une **loi normale de moyenne m et variance σ^2**, X ~ $\mathcal{N}(m, \sigma)$

$\Leftrightarrow$ pour tout x $\in \mathbb{R}$ sa densité f est donnée par $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Sur le graphe ci-dessous, on a dessiné 3 densités normales de même variance mais avec trois moyennes différentes :

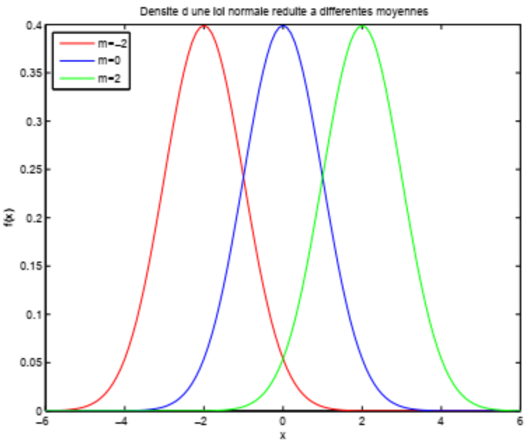


Figure 15. Densité d'une loi normale réduite à différentes moyennes

Sur le graphe ci-dessous, on a dessiné 3 densités normales de même moyenne mais avec trois variances différentes :

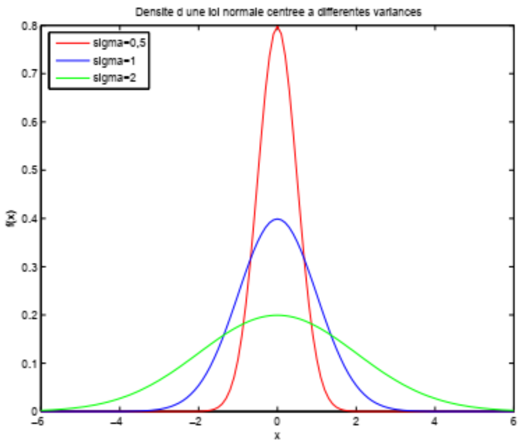


Figure 16. Densité d'une loi normale centrée a différentes variances

<u>Proposition :</u> Soit X $\sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors on a E(X)=m et Var(X)=σ^2

<u>Proposition :</u> Si X $\sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

<u>Remarque :</u>

Soit Y~N (0; 1), alors on a

P(1≤ Y≤ 1)=0,68
P(2≤ Y≤ 2)=0,95
P(3≤ Y≤ 3)=0,99

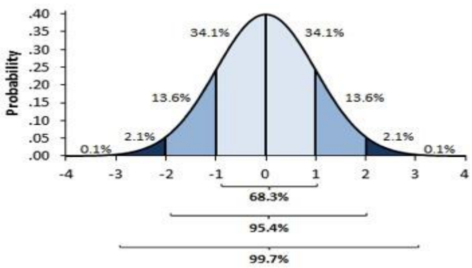


Figure 17. Probabilités d'une $\mathcal{N}(0,1)$ « classiques»

Par la proposition précédente, nous déduisons que pour si X $\sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors on a :

P(m -σ ≤ X ≤ m + σ)=0,68
P(m-2σ ≤ X≤ m+2σ)=0,95
P(m-3σ≤ X ≤ m+3σ)=0,99

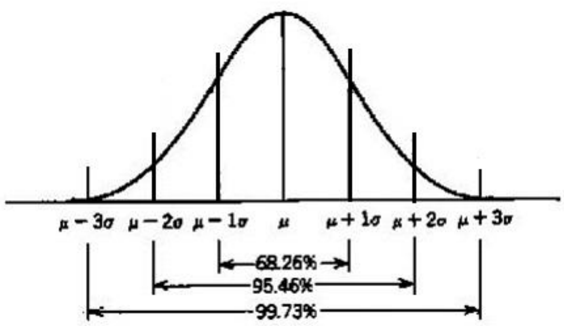


Figure 18. Probabilités d'une $\mathcal{N}(m, \sigma)$ « classiques »

3.4.6. Autre lois discrètes et continues

Pour modéliser la réalité, d'autre lois existent, nous en citons ici quelques-unes qui n'ont pas été présentées dans ce cours

,

Loi discrètes	Loi de Dirac
	Loi hypergéométrique
	Loi Binomiale négative
Loi continues	Loi log-normale
	Loi gamma

4. Théorème limite : Loi des grands nombres

Dans ce chapitre nous allons étudier un résultat fondamental en théorie des probabilités qui est utilisé quasi systématiquement pour des problèmes de statistiques.

4.1. Moyenne empirique

On commence par la définition de la Moyenne Empirique. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi, on définit :

- la somme de ces variables aléatoires $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$
- la moyenne empirique est donnée par $\overline{S_n} = \frac{S_n}{n}$

Proposition : Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors on a : $E(\overline{S_n}) = E(X_1)$ et $Var(\overline{S_n}) = n \times var(X_1)$

Exemple : On s'intéresse au nombre de faces S_n obtenues après n lancés d'une pièce équilibrée. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli, donc le nombre de faces obtenues $S_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ dont l'espérance et la variance sont connues : $E(Sn) = n \times 1/2$ et $Var(Sn) = n/4$. Par linéarité de l'espérance, on a $E(\overline{S_n}) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{2}$. Les propriétés de la variance permettent de déduire que $Var(\overline{S_n}) = \frac{1}{n^2}Var(S_n) = \frac{1}{4n}$

On remarque que l'on a bien $E(\overline{S_n}) = E(X_1)$ et $Var(\overline{S_n}) = \frac{Var\ (X_1)}{n}$

On remarque également que $E(S_n) = \frac{n}{2}$ est bien conforme à notre intuition : si on a une chance sur deux d'obtenir un certain résultat lors d'une expérience et que l'on réitère de manière indépendante cette expérience n fois, alors en moyenne on obtiendra le résultat n/2 fois. En fait la Loi faible des grands nombres nous dira que l'on a plus que cela

4.2. Inégalité de Markov et de Chebyshev

Ce paragraphe a pour but de donner les outils pour démontrer la loi faible des grands nombres. La preuve de ce résultat dont nous donnerons la démonstration est basée sur une inégalité très utilisée en théorie des probabilité l'inégalité de Chebyshev.

Proposition : Soit X une v.a. telle que $E(X) < +\infty$ et $Var(X) < +\infty$, pour tout $c > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

- Inégalité de Markov : $P(X > c) \leq \frac{E(X)}{c}$
- Inégalité de Chebyshev : $P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

On sait d'ores et déjà que la moyenne empirique a pour espérance m et pour variance σ^2/n. Ainsi, plus n est grand, moins cette v.a. varie. A la limite, quand n tend vers l'infini, elle se concentre sur son espérance, m. C'est la loi des grands nombres

<u>Théorème (Loi des grands nombres) :</u> Soit $(Xi)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que Var(X_1) < ∞. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n \to \infty} P(|\overline{S_n} - E(X_1)| \leq \varepsilon) = 1$

<u>Remarque :</u> On s'intéresse au nombre de faces S_n obtenues après n lancés d'une pièce non-équilibrée (« Face » =1 avec une probabilité de 0.3). Ce résultat dit la chose suivante : avec une probabilité qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini la moyenne empirique $\overline{S_n}$ des $(Xi)_{i \leq n}$ tend vers la moyenne d'une des variables X_i, qui ont toute la même moyenne puisque de même loi.
Pour notre lancé de pièce cela signifie qu'avec une probabilité qui tend vers 1, si on fait n lancés on obtiendra bien à peu-près (à $\epsilon \times n$ près, où ϵ est petit) n/2 fois "face".

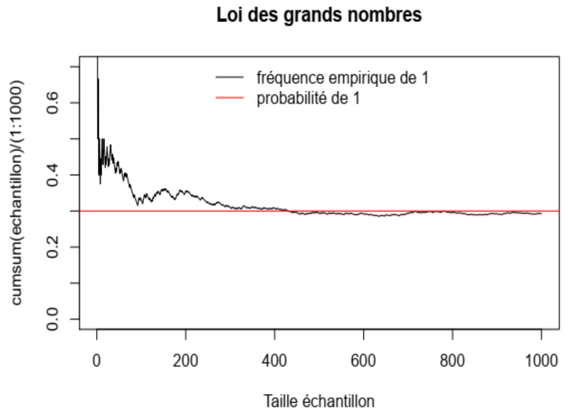


Figure 19. Illustration de la loi des grands nombres (lancé de pièce baisée)

Des questions restent en suspens : qu'est-ce qu'un "grand nombre de fois", que signifie "proche de la moyenne E(X_1)". Le théorème central limite va apporter des réponses.

5. Bibliographie

Pierre Dagnélie. *Statistique théorique et appliquée*. De Boeck Universities, 1998.

J.-F. Delmas. *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*. Polycopié, ENSTA, 2008.

Rick Durrett. *Elementary probability for applications*. Cambridge university press, 2009.

J. Jacod and P. Protter. *Probability essentials.* Springer, 2000

Richard Arnold Johnson & Gouri K. Bhattacharyya. *Statistics: principles and methods*. Wiley, 1996.

A. Perrut. *Cours de probabilités et statistiques*. Polycopié, Université Claude Bernard Lyon 1, Stage, 2010

Sheldon M. Ross. *Initiation aux probabilités*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.

Gilbert Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Technip, 1990.

Annexe A : Cardinaux et dénombrement

A.1. Cardinaux

On suppose que E est fini et qu'il possède n éléments.
Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. On le note CARD.
Ainsi : CARD(E)=n ; Pour tout $p \epsilon \mathbb{N}^*$, CARD (E^p)=np.

Voici quelques résultats :

- CARD(∅)=0 ;
- CARD(A)=0⇔A=∅)
- (A⊂B) ⇒(CARD(A) ≤ CARD(B))
- ((A ⊂ B) et (CARD(A)=CARD(B))) ⇒ (A=B)
- CARD (A ∪ B)=CARD(A) + CARD(B) – CARD (A ∩ B)

- Si A, B, C sont des parties de E 2 à 2 disjointes ⇒ CARD(A ∪ B ∪ C)=CARD(A) + CARD(B) + CARD(C).
- Plus généralement, le cardinal d'une réunion finie de parties de E deux à deux disjointes est la somme des cardinaux de ces parties.

- CARD(A×B)=CARD(A) × CARD(B).
- Plus généralement, le cardinal d'un produit cartésien de parties de E est le produit des cardinaux de ces parties.

A.2. Dénombrements

On suppose que E est un ensemble fini non vide de n éléments.

Exemple : E est une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

A.2.1.1. Les permutations des éléments d'un ensemble fini. Les factorielles.

Modèle/Définition : Le nombre de façons de ranger les n éléments de E est aussi le nombre de **n-arrangements** d'éléments de E : il s'agit en effet de choisir sans remise un 1er élément puis un 2ième puis un 3ième, etc., jusqu'à l'épuisement de l'ensemble. Ce nombre est : n(n – 1)(n – 2)(n – 3)...1. Par définition, ce nombre est la **factorielle** de n, noté n !

Proposition : Il y a n! façons de ranger n éléments. $n!=1\times 2\times 3\times \cdots \times (n-1)\times n$

Convention : 0!=1.

Exemple : combien existe-t-il d'anagrammes de PROBA ? 5!

A.2.1.2. Les p-listes d'éléments d'un ensemble de n éléments, $p \geq 1$.

Definition/Modèle : p tirages d'une boule parmi n, avec ordre mais avec remise. On tire une boule. On note son numéro. On la remet dans l'urne. On fait de même pour une $2^{\text{ième}}$ boule, puis pour une $3^{\text{ième}}$, ..., enfin pour une $p^{\text{ième}}$. On obtient ainsi une suite ordonnée de p numéros compris entre 1 et n, avec d'éventuelles répétitions. C'est **une p-liste d'éléments** de {1,2,3,...,n}.

Proposition : Les p-listes d'éléments d'un ensemble de n éléments sont au nombre de n^p

A.2.1.3. Les p-arrangements d'éléments d'un ensemble de n éléments, $n \geq p \geq 1$.

Définition/Modèle : p tirages d'une boule parmi n, avec ordre mais sans remise, $n \geq p \geq 1$. On tire une boule. On note son numéro. On ne la remet pas dans l'urne. On fait de même pour une $2^{\text{ième}}$ boule, puis pour une $3^{\text{ième}}$,..., enfin pour une $p^{\text{ième}}$. On obtient ainsi une suite ordonnée de p numéros compris entre 1 et n, deux à deux distincts. C'est **un p-arrangement d'éléments** de {1,2,3,...,n}.

Proposition : Les p-arrangements d'éléments d'un ensemble de n éléments sont au nombre de

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

Remarque :
La différence entre une p-liste et un p-arrangement est que les répétitions sont possibles pour les p-listes, mais impossibles pour les p-arrangements. Ainsi, (1, 1, 2) est une 3-liste mais pas un 3-arrangement, (2, 1, 3) est à la fois une 3-liste et un 3-arrangement.
Tout p-arrangement est une p-liste, les p-arrangements sont les p-listes sans répétition.
$A_n^n = n!$; $A_n^0 = A_0^0 = 1$;

A.2.1.4. Les p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de n éléments, $n \geq p \geq 1$.

Définition/Modèle : tirage simultané de p boules dans une urne qui en contient n, sans ordre ni remise. Les **p-combinaisons d'éléments d'un ensemble E** de n éléments sont les parties de E à p éléments. On ne tient pas compte de l'ordre.

Proposition : Soient n et p tel que $n \geq p \geq 1$, le nombre de p-combinaisons d'un ensemble de p éléments est noté C_n^p ou encore : $\binom{n}{p}$ et vaut $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple : Un main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (5 cartes parmi 32)

Remarque : La différence entre une p-combinaison et un p-arrangement est que dans un p-arrangement on tient compte de l'ordre, alors que dans une p-combinaison, on n'en tient pas compte. Ainsi, les 3-arrangements (1,2,3) et (2,1,3) sont différents, alors que les 3-combinaisons {1,2,3} et {2,1,3} sont les mêmes.
Dans les p-combinaisons, il n'y a ni ordre ni répétition.

Cas particulier : $\binom{n}{o} = \binom{1}{n} = \binom{n}{n} = 1$

Propriétés : Soient n et p tel que $n \geq p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

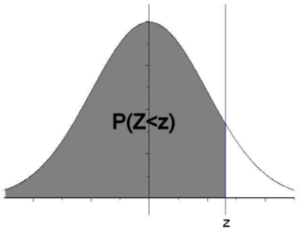
$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

<u>Proposition :</u> Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le cardinal de P(E) vaut 2^n.

Annexe B : Tables statistiques

B.1. Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \mathrm{d}x$$



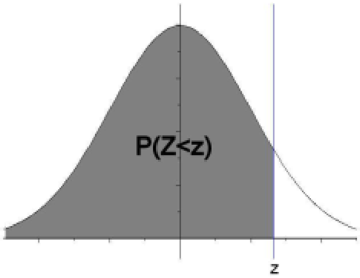
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Grandes valeurs de z :

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	4.0	4.5
$F(z)$	0.9987	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999968	0.999997

B.2. Fractiles de la loi normale centrée réduite

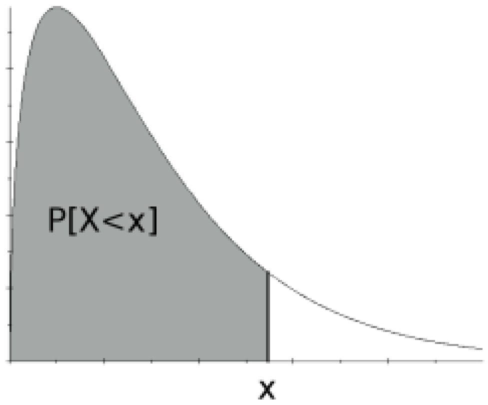
<u>Attention :</u> si P(Z < z)< 0:5, alors z est négatif



$P[Z < z]$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	Inf	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	0.99
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749	2.0537	0.98
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.96	1.9431	1.9268	1.911	1.8957	1.8808	0.97
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.825	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	0.96
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.706	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	0.95
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	0.94
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.522	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	0.93
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	0.92
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	0.91
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.293	1.2873	1.2816	0.90
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	0.89
0.11	1.2265	1.2212	1.216	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.185	1.18	1.175	0.88
0.12	1.175	1.17	1.165	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	0.87
0.13	1.1264	1.1217	1.117	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	0.86
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.045	1.0407	1.0364	0.85
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.011	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	0.84
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	0.83
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.923	0.9192	0.9154	0.82
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.904	0.9002	0.8965	0.8927	0.889	0.8853	0.8816	0.8779	0.81
0.19	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.856	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	0.80
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.831	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	0.79
0.21	0.8064	0.803	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.779	0.7756	0.7722	0.78
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	0.77
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.729	0.7257	0.7225	0.7192	0.716	0.7128	0.7095	0.7063	0.76
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.684	0.6808	0.6776	0.6745	0.75
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.662	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	0.74
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.628	0.625	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	0.73
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	0.72
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.574	0.571	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	0.71
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.533	0.5302	0.5273	0.5244	0.70
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4959	0.69
0.31	0.4959	0.493	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	0.68
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.451	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	0.67
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	0.66
0.34	0.4125	0.4097	0.407	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.388	0.3853	0.65
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	0.64
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	0.63
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.316	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	0.62
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.295	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	0.61
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	0.60
0.40	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.243	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	0.59
0.41	0.2275	0.225	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.207	0.2045	0.2019	0.58
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.184	0.1815	0.1789	0.1764	0.57
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.156	0.1535	0.151	0.56
0.44	0.151	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	0.55
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.113	0.1105	0.108	0.1055	0.103	0.1004	0.54
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	0.53
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	0.52
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	0.51
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.015	0.0125	0.01	0.0075	0.005	0.0025	0.0000	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	$P[Z < z]$

B.3. Fractiles de la loi du X^2

ν= nombre de degrés de liberté



ν \ P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.016	0.064	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	0.211	0.446	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	7.378	9.21	10.597	13.816
3	0.584	1.005	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	1.064	1.649	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.989	7.779	9.488	11.143	13.277	14.86	18.467
5	1.61	2.343	3	3.655	4.351	5.132	6.064	7.289	9.236	11.07	12.833	15.086	16.75	20.515
6	2.204	3.07	3.828	4.57	5.348	6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	2.833	3.822	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.803	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	3.49	4.594	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	11.03	13.362	15.507	17.535	20.09	21.955	26.124
9	4.168	5.38	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	12.242	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	4.865	6.179	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	5.578	6.989	8.148	9.237	10.341	11.53	12.899	14.631	17.275	19.675	21.92	24.725	26.757	31.264
12	6.304	7.807	9.034	10.182	11.34	12.584	14.011	15.812	18.549	21.026	23.337	26.217	28.3	32.909
13	7.042	8.634	9.926	11.129	12.34	13.636	15.119	16.985	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	7.79	9.467	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	18.151	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	8.547	10.307	11.721	13.03	14.339	15.733	17.322	19.311	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	9.312	11.152	12.624	13.983	15.338	16.78	18.418	20.465	23.542	26.296	28.845	32	34.267	39.252
17	10.085	12.002	13.531	14.937	16.338	17.824	19.511	21.615	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.79
18	10.865	12.857	14.44	15.893	17.338	18.868	20.601	22.76	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	11.651	13.716	15.352	16.85	18.338	19.91	21.689	23.9	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.82
20	12.443	14.578	16.266	17.809	19.337	20.951	22.775	25.038	28.412	31.41	34.17	37.566	39.997	45.315
21	13.24	15.445	17.182	18.768	20.337	21.991	23.858	26.171	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	14.041	16.314	18.101	19.729	21.337	23.031	24.939	27.301	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	14.848	17.187	19.021	20.69	22.337	24.069	26.018	28.429	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	15.659	18.062	19.943	21.652	23.337	25.106	27.096	29.553	33.196	36.415	39.364	42.98	45.559	51.179
25	16.473	18.94	20.867	22.616	24.337	26.143	28.172	30.675	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.62
26	17.292	19.82	21.792	23.579	25.336	27.179	29.246	31.795	35.563	38.885	41.923	45.642	48.29	54.052
27	18.114	20.703	22.719	24.544	26.336	28.214	30.319	32.912	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	18.939	21.588	23.647	25.509	27.336	29.249	31.391	34.027	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	19.768	22.475	24.577	26.475	28.336	30.283	32.461	35.139	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	20.599	23.364	25.508	27.442	29.336	31.316	33.53	36.25	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
31	21.434	24.255	26.44	28.409	30.336	32.349	34.598	37.359	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003	61.098
32	22.271	25.148	27.373	29.376	31.336	33.381	35.665	38.466	42.585	46.194	49.48	53.486	56.328	62.487
33	23.11	26.042	28.307	30.344	32.336	34.413	36.731	39.572	43.745	47.4	50.725	54.776	57.648	63.87
34	23.952	26.938	29.242	31.313	33.336	35.444	37.795	40.676	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	65.247
35	24.797	27.836	30.178	32.282	34.336	36.475	38.859	41.778	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	29.051	32.345	34.872	37.134	39.335	41.622	44.165	47.269	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	33.35	36.884	39.585	41.995	44.335	46.761	49.452	52.729	57.505	61.656	65.41	69.957	73.166	80.077
50	37.689	41.449	44.313	46.864	49.335	51.892	54.723	58.164	63.167	67.505	71.42	76.154	79.49	86.661