CH..... : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1-PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

11-Différentes expressions du produit scalaire

1-Dans le plan, une unité de longueur étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est défini par : $\vec{u}.\vec{v} =$...

2-Pour $\vec{u}$et $\vec{v}$deux vecteurs non nuls, $\vec{u}.\vec{v} =$.. où αest la mesure de l'angle géométrique associée à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

3- Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}$et $\vec{v}$ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), alors : $\vec{u}.\vec{v} =$...................................

4-Si $\overrightarrow{C'D'}$est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ = $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

12-Orthogonalité et distance

Théorème(admis) : deux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ sont orthogonaux ⇔ $\vec{u}.\vec{v} = 0$
Par conséquent, dans un repère orthonormal, dans le cas où (x, y) coordonnées de $\vec{u}$ et (x', y') coordonnées de $\vec{v}$, cela revient à dire que .... = 0

Il résulte de l'expression $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}\|\cos(\alpha)$ que $\vec{u}.\vec{u} =$.................................
Par conséquent, pour A et B deux points quelconques du plan AB² = $\|\overrightarrow{AB}\|^2$ = ...

Remarque : lorsque $\vec{u}$et $\vec{v}$ sont colinéaires (c'est à dire............................), on a $|\vec{u}.\vec{v}| =$................

Théorème (admis) : Dans un repère orthonormé :

- la droite d d'équation ax+by+c=0 admet pour vecteur normal $\vec{n}$(a,b) et $\vec{u}$ (-b,a) comme vecteur directeur de d
- si $\vec{n}$(a,b) est normal à une droite d, alors d a une équation de la forme ax+by+c=0

Théorème distance d'un point à une droite (admis) : Dans un repère orthonormal, la distance du point A (x_A, y_A) à la droite d d'équation ax+by+c = 0 est égale à $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

13-Quelques applications du produit scalaire

- La relation d'Al-Kaashi (généralisation de Pythagore) :

Soit ABC un triangle tel que AB = c, AC = c et $B\hat{A}C = \alpha$,
on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2\text{b} \times \cos\alpha$

- Le théorème de la Médiane : Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB],

alors pour tout point M, MA² + MB² = 2MI² + $\frac{1}{2}$AB²

2-PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

21- Définition

Définition : dans l'espace, un unité de longueur étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nécessairement coplanaires,
c'est à dire qu'il existe trois points A, B et C , formant un plan,
tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
L'unité de longueur sur le plan (ABC) étant celle choisie sur l'espace la définition du produit scalaire dans l'espace coïncide alors avec la définition du produit scalaire dans le plan.
Ainsi toutes les expressions de ce dernier sont encore valables dans l'espace

Si α est la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$
Par conséquent : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{\dots}\|^2 =$........

Si dans le plan (ABC), le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB),
Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$=.............

Remarque : on a toujours $|\vec{u}.\vec{v}|$= ....

Remarque : pour déterminer l'angle géométrique de
deux vecteurs situés dans l'espace, on choisit des représentants
qui ....

22- Expression analytique du produit scalaire

Théorème : Si, dans un repère orthonormal, $\vec{u}$et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x; y; z) et (x'; y'; z') alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Démonstration :
$\|\vec{u}\|^2$= .... $\|\vec{v}\|^2$ =.................... $\|\overrightarrow{u+v}\|^2$ = ...
$\vec{u}.\vec{v}$= ....

23- Règles de calcul

Théorème : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, et \vec{w}$, et les réels a et b :
1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ 2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ 3)$(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)\vec{u}.\vec{v}$

Démonstration : Démontrons seulement 2), les autres cas se faisant de la même manière. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, notons (x; y; z), (x'; y'; z'), et (x''; y''; z'') les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, et \vec{w}$
Les coordonnées de $\overrightarrow{v+w}$ sont ....
$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$= ....
= ....

3- ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

31-Vecteurs orthogonaux

Définition : Dans l'espace, deux vecteurs non nuls $\vec{u}$et $\vec{v}$ sont orthogonaux ⇔ si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Convention : le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs

Théorème :

1- deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

2- Donc, dans un repère orthonormal, les vecteurs $\vec{u}$ (x; y; z) et $\vec{v}$(x'; y'; z') sont orthogonaux⇔xx'+yy'+zz' = 0

Démonstration :

1) Si $\vec{u}= \vec{0}$, alors............................

On suppose les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$non nuls, il existe trois points A, B et C , formant un plan, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{u}.\vec{v}$= 0⇔ ....

2)

Exemple : Montrer que les vecteurs $\vec{u}$(1; 2; -3) et $\vec{v}$(0; 4; 5) ne sont pas orthogonaux

32-Vecteur normal à un plan

Par définition, dire que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan P signifie que la droite (AB) est normale (orthogonale) au plan P

Définition : Un vecteur normal à plan P est un vecteur non nul $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale au plan P

Remarque : tout vecteur non nul $\vec{w}$ coliéaire est....

33-Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Soit d une droite, $\vec{n}$ un vecteur directeur de d et A un point de d. Le plan (P) perpendiculaire à la droite d passant par A est l'ensemble des points M tels que ....,

(P) est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$, le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à (P)

Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Remarque/Application : Soit P_1 et P_2 deux plans, $\overrightarrow{n_1}$vecteur normal à (P_1) et $\overrightarrow{n_2}$ vecteur normal à (P_2)

$\overrightarrow{n_1}$vecteur colinéaire à $\overrightarrow{n_2}$ ⇔..

$\overrightarrow{n_1}$vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n_2}$ ⇔....................................

Théorème: Soient d une droite et P un plan,
d et P sont perpandiculaires ⇔d est orthogonale à deux droites sécantes du plan P

__Démonstration (Exigible):__

⇨ Soient

Montrons que....

<= Montrons que....

34-Projection orthogonale sur un plan

On ne change pas le produit scalaire de deux vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en remplaçant l'un des deux (par exemple $\overrightarrow{CD}$) par le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ tel que C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur un plan *P* contenant la droite (AB).

En effet, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$= $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D'})$ =

4-ÉQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN

__Théorème (admis) :__ Dans un repère orthonormal :

1. Si le plan (P) a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$, alors (P) a une équation cartésienne de la forme ax+by+cz+d = 0, où a, b, c ne sont pas simultanément nul puisque$\vec{n}$ est un vecteur normal
2. réciproquement, si les réels a, b, c , et d sont donnés et a, b, c non nuls simultanément, l'ensemble des points M(x; y; z) tels que ax+by+cz+d = 0 est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

__Démonstration(exigible) :__

1.

2.

__Conséquence :__ si un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ à un plan et un point appartenant à ce plan permettent de trouver une équation cartésienne de ce plan.

Réciproquement une équation cartésienne du plan donne un vecteur normal à celui ci.

__Régionnement de l'espace :__

Le plan (P), d'équation cartésienne partage l'espace en deux demi-espace ouverts :

- les points M(x; y; z) de l'un sont tels que ax+by +c z+d>0
- les points M(x; y; z) de l'autre sont tels que ax+by +cz+d >0

Exercice : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-2;1;3)$ et orthogonal à (BC) avec $B(1;-2;2)$ et $C(4;1;-1)$.

42-Distance d'un point à un plan (Hors programme)

Théorème distance d'un point à un plan: Dans un repère orthonormal,
la distance du point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ au plan (P) d'équation cartésienne ax+by+cz+d = 0 est égale à $\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Démonstration : Même schéma que la démonstration dans 1.2) du théorème relatif à la distance d'un point à une droite.

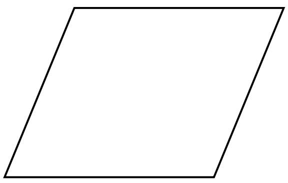
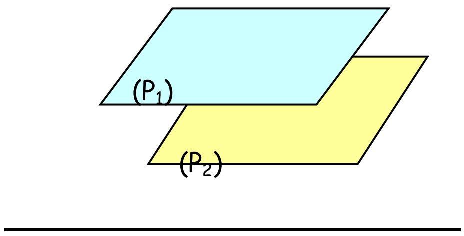
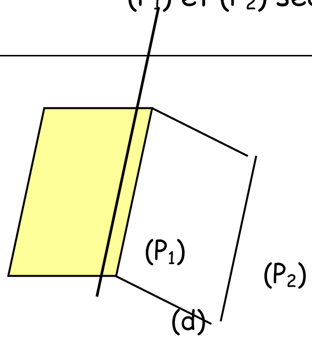
Exercice : Calculer la distance du point A(5,2,-3) au plan (P) d'équation : x+4y+8z+2=0

5-INTERSECTIONS DE PLANS ET DE DROITES

Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

51- Intersection de deux plans

Soit (P_1) et (P_2) ont pour équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

(P_1) et (P_2) confondus	(P_1) et (P_2) strictement parallèles	(P_1) et (P_2) sécants
		
(S) admet pour solution tout triplet solution de l'équation cartésienne de (P_1) (ou celle de (P_2))	(S) n' a pas de solution	d est l'ensemble des points M(x; y; z) tels que (x; y; z) sont les solutions de (S)

Méthode pour étudier l'intersection deux plans:
Deux plans d'équations ax + by +cz + d = 0 et a'x + b'y +c'z + d' = 0 sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux $\vec{n_1}(a;b;c)$ et $\vec{n_2}(a';b';c')$ sont colinéaires. On s'intéresse à $\vec{n_1}.\vec{n_2} \neq 0$
Lorsque que ces deux plans sont sécants, on résout alors le système (S) $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$. Ce système possède alors une infinité de solutions qui décrivent la droite d d'intersection entre (P_1) et (P_2)

Exercice : Considérons les plans d'équations : (P) : 2x+y-z-2=0 et (P') :x+3y+7z-11=0.
Démontrer que les deux plans sont sécants.
Donner une représentation paramétrique de la droite (d), intersection de ces deux plans.

52-intersection d'un plan et d'une droite (Hors programme)

(P) a pour équation ax+by+z+d=0, et donc pour vecteur normal $\vec{n}$(....., ..., ...)
Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Méthode pour étudier l'intersection d'un plan et d'une droite :
On s'intéresse à l'orthogonalité de $\vec{u}$et $\vec{n}$. On sait par la suite si la droite intercepte, ou pas, le plan
Dans le cas où l'intersection est non vide et réduite à un point, pour trouver le point $A(x_A, y_A, z_A)$d'intersection de Δ et (P), $x_A, y_A, et z_A$ vérifient l'équation paramétrique de Δet l'équation cartésienne de P .
On résout alors un système de 4 équations à trois inconnues

Exercice : Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le plan P a pour équation 5x+y-z+3, et la droite d pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1-6t \\ z = 3-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Étudier la position de d et P

6-INTERSECTION DE TROIS PLANS (Hors programme)

Soit (P), (Q) et (R) trois plans de l'espace,
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les plans (P), (Q) et (R) ont respectivement pour équations cartésiennes $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$ et $a''x+b''y+c''z+d''=0$, où a, b, c puis a', b', c' puis a'', b'', c'' ne sont pas tous les trois nuls.

Pour étudier l'intersection des trois plans, on peut résoudre le système : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$.
Ce système, d'après le point de vue géométrique, a
- soit aucun triplet solution,
- soit un triplet solution,
- soit une infinité de triplets solutions.

Exercice :

1) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le plan (P) a pour équation : $2x-y+z-7=0$, le plan (Q) a pour équation : $x+2y-z-6=0$, le plan (R) a pour équation : $-x+y+2z-11=0$.

Étudier l'intersection de ces trois plans.

2) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le plan (P) a pour équation : $2x+3y-2z-2=0$, le plan (Q) a pour équation : $4x-3y+z-4=0$, le plan (R) a pour équation : $2x+12y-7z-2=0$.

Étudier l'intersection de ces trois plans.