NOM Prenom

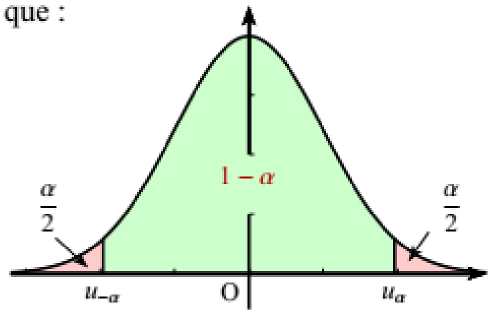
Correction DS : Probabilités discretes et continues

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) On cherche un réel x strictement positif tel que :

$$\begin{aligned} P(-x \leqslant X \leqslant x) &= 1-\alpha \\ \Phi(x) - \Phi(-x) &= 1-\alpha \\ \Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1-\alpha \\ 2\Phi(x) - 1 &= 1-\alpha \\ \Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$



On sait que la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. De plus :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \;, \quad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

2) **Application :**

a) On a donc : $1-\alpha = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0,1$

On doit donc avoir : $\Phi(u) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad u = \Phi^{-1}(0,95)$.

A l'aide de la calculatrice avec la fonction "**FracNorm(0,9)**" ou à l'aide d'une table, on trouve : $u \simeq 1,64$

b) On a : $-1,64 \leqslant q - 100 \leqslant 1.64$ donc $q \in [98,36; 101,64]$

Exercice 2

Pannes informatiques **(6 points)**

1) On a : $P(X < 7) = 0,6 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-7\lambda} = 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-7\lambda} = 0,4$

Comme la fonction ln est monotone, on a alors :

$$-7\lambda = \ln 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln 0,4}{7} \simeq 0,1308 \simeq 0,131$$

2) On a : $P(X > 5) = e^{-5\lambda} = e^{-0,655} \simeq 0,519 \simeq 0,52$

3) Comme la loi exponentielle est sans mémoire, on a :

$$P_{X\geqslant 4}(X > 9) = P(X > 5) \simeq 0,52$$

4) On a : $P(6 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 6) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda} = e^{-0,786} - e^{-1,31} \simeq 0,19$

5) a) Les 8 relevés sont indépendants et à chaque relevé, il y a que deux eventualités, soit le temps est supérieur à 5 heures ($p = 0,52$), soit il est inférieur ou égal à 5 heures ($1 - p = 0,48$). Y suit donc une loi binomiales $\mathscr{B}(8; 0,52)$

b) $P(\text{Y} = 3) = \binom{8}{3} \times 0,52^3 \times 0,48^5 \simeq 0,20$

c) $\text{E(Y)} = np = 8 \times 0,52 \simeq 4,12$
L'espérance est donc de 4 relevés supérieurs à 5 heures.

Exercice 3

Conception des tests de QI **(3 points)**

1) On pose les variables aléatoires, X associé à la valeur du QI et $\text{Z} = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
X suit la loi normale $\mathcal{N}(100; 15)$ et Y la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$

$$P(\text{X} < 70) = P\left(\text{Z} < \frac{70 - 100}{15}\right) = P(\text{Z} < -2) = 1 - \Phi(2) \simeq 1 - 0,9772 \simeq 0,0228$$

2,28 % de la population a un QI inférieur à 70

2) On a :

$$P(100 \leqslant \text{X} \leqslant 115) = P\left(0 \leqslant \text{Z} \leqslant \frac{115 - 100}{15}\right) = P(0 \leqslant \text{Z} \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(0)$$
$$\simeq 0,8413 - 0,5 \simeq 0,3413$$

34,13 % de la population a un QI compris entre 100 et 115.

3) On cherche x tel que : $P(\text{X} > x) = 0,02$ donc que $P(\text{X} \leqslant 2) = 0,98$. On a alors :

$$P\left(\text{Z} \leqslant \frac{x - 100}{15}\right) = 0,98 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 100}{15} = \Phi^{-1}(0,98) \simeq 2,05$$

Donc : $x \simeq 15 \times 2,05 + 100 \simeq 130,75$

Il faut donc avoir un QI supérieur à 130 pour faire partie de cette association

Exercice 4

Composants éléctroniques **(4 points)**

1) On fait 400 expériences identiques et indépendantes (avec remise) et sur chaque expérience, il y a que 2 issues : soit le composant est défectueux ($p = 0,02$), soit il ne l'est pas ($1 - p = 0,98$).
X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(400; 0,02)$

2) $P(\text{X} \geqslant 10) = 1 - P(\text{X} \leqslant 9) \simeq 1 - 0,7179 \simeq 0,2821$

3) a) Les conditions d'approximation sont vérifiées :

$$n = 400 \geqslant 30, \quad np = 400 \times 0,02 = 8 \geqslant 5, \quad n(1 - p) = 400 \times 0.98 = 392 \geqslant 5$$

b) Les paramètres de $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ sont :

$$\mu = np = 8 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7,84} = 2,8$$

c) $P(X \geqslant 10) = P_N(X \geqslant 9,5) = \text{NormalFRép}(9.5, 1\text{E}99, 8, 2.8) \simeq 0,2961$

d) $\epsilon \simeq \dfrac{0,2961 - 0,2821}{0,2821} \times 100 \simeq 5\,\%$

Exercice 5

Triangle **(6 points)**

1) Cf figure ci-après.

2) a) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1+7i-2-i}{6+3i-2-i} = \dfrac{-3+6i}{4+2i} = \dfrac{(-3+6i)(4-2i)}{4^2+2^2}$

$$= \frac{-12+6i+24i+12}{20} = \frac{30i}{20} = \frac{3}{2}i$$

b) $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

3) a) $|z-2-i| = |z-6-3i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow \text{AM} = \text{BM}$

M se trouve donc sur la médiatrice du segment [AB].
L'ensemble (Δ) des points M est donc la médiatrice du segment [AB].

b) Calculons les coordonnées du milieu I de [BC].

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{6+3i-1+7i}{2} = \frac{5+10i}{2} = \frac{5}{2} + 5i = z_E$$

Donc I = E, le point E est alors le milieu de [BC].

4) a) $\text{EB} = |z_B - z_E| = \left|6+3i-\dfrac{5}{2}-5i\right| = \left|\dfrac{7}{2}-2i\right| = \sqrt{\dfrac{49}{4}+4} = \sqrt{\dfrac{49+16}{4}} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

b) $|z - z_E| = \dfrac{\sqrt{65}}{2} \Leftrightarrow \text{EM} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

Le point M se trouve sur le cercle de centre E et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ des point M est donc le cercle de centre E et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

c) Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypoténuse. Le point E est le milieu de l'hypoténuse [BC] et le rayon de $(\mathscr{C})$ est égal à la distance EB. $(\mathscr{C})$ est donc le cercle circonscrit au triangle ABC, il passe donc par les points A, B et C.

NOM Prenom