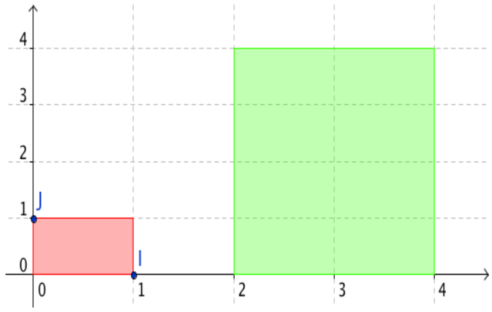
INTEGRATION (Partie 1)

I. INTEGRALE ET AIRE

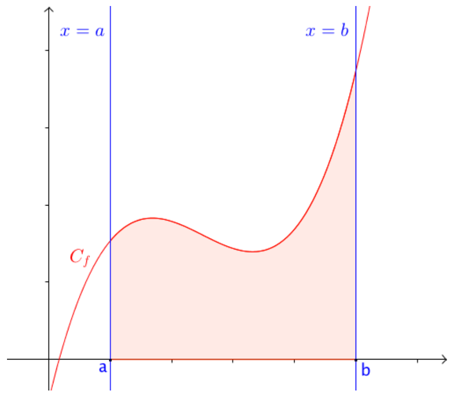
1) Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge. L'aire du rectangle vert est donc égale à ..... u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).



2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]. On appelle intégrale de f sur [a ; b] l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Notation

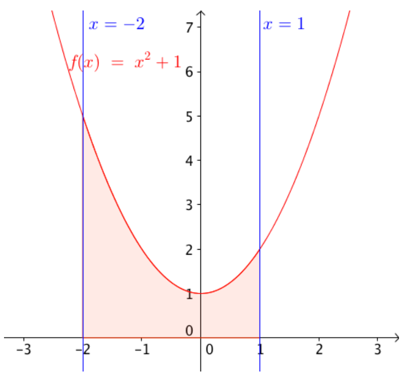
L'intégrale de la fonction f sur [a ; b] se note : $\int_a^b f(x)\,dx$.
On lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Remarques :
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

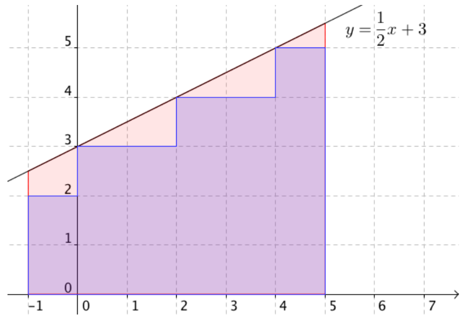
Exemple :
L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale .... sur l'intervalle .... et se note.........



Exemple : a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

a)



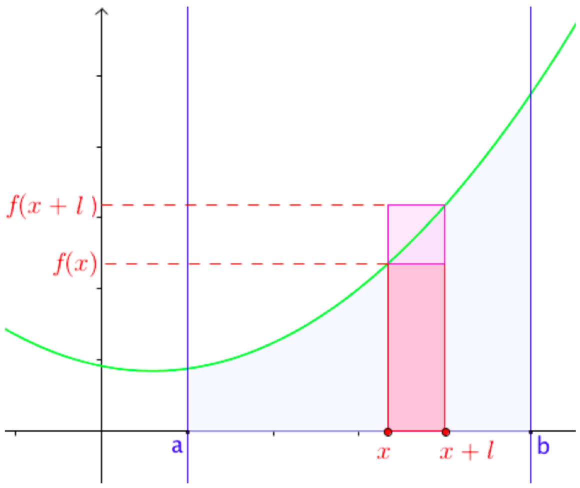
b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer .... délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=.... et x= .....

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ = ...u.a. +........u.a. = ...=u.a.

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

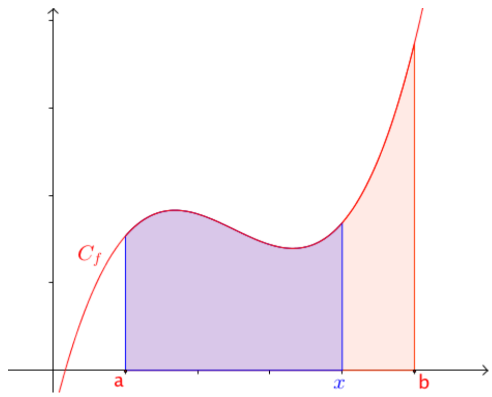
Soit une fonction *f* continue, positive et monotone sur un intervalle [a ; b].
On partage l'intervalle [a ; b] en n sous-intervalles de même amplitude $l=\frac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x\,;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire ....
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire.......
- Sur l'intervalle [a ; b], l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".



5) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]. La fonction F définie sur [a ; b] par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur [a ; b] et sa dérivée est la fonction *f*.



Démonstration
dans le cas où *f* est strictement croissante :
- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle [a ; b] avec $h>0$.

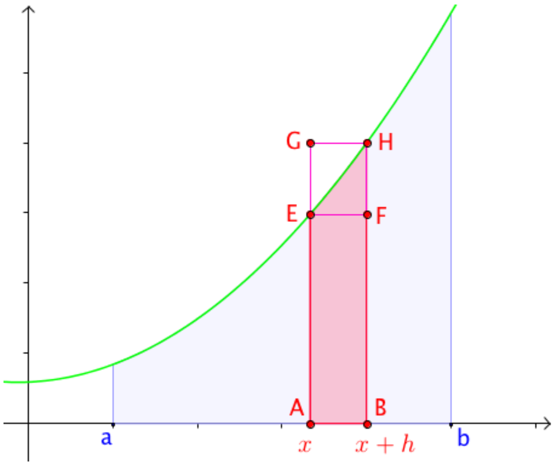
On veut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(x)dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction *f* (en vert).
Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire(ABFE)=h\times f(x)$ et
$Aire(ABHG)=h\times f(x+h)$.



Comme f est croissante sur [a ; b], on a :
$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$
Puisque $h > 0$, on a :
$f(x) < \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$.
Comme f est continue sur [a ; b], $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

- Dans le cas où $h < 0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).
On en déduit que $F'(x) = f(x)$.—CQFD--

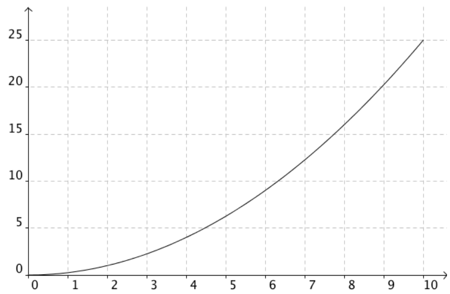
Exercice :

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.

a) Etudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.

a) t →t/2 est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est .... sur [0 ; 10] et F'(x)=.....
On dresse le tableau de variations :

b) Pour tout x de [0 ; 10], F(x) =.....
On a ainsi la représentation graphique de F :



II. PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE

1) Définition

Exemple :
On considère les fonctions suivantes : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 2x+3$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2+3x-1$
On constate que F'(x) = ...
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence : "F a pour dérivée f" ⇔ "f a pour primitive F".

Exemple : $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de f(x)=...... car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 0$ entier		$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n>1$ entier		$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$		$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$		$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$		$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$		$\mathbb{R}$

3) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a\ ;\ b]$ alors :
- $F+G$ est une primitive de $f+g$
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

4) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ n ¹ -1 entier		Si $n<0, u(x)\neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		$u(x)>0$
$\dfrac{u'}{u}$		$u(x)>0$
$u'e^u$		
$u'\cos u$		
$u'\sin u$		

Exercice :
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x$ sur $I=\mathbb{R}$

b) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}$ sur $I=]0;+\infty[$

c) $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ sur $I=\mathbb{R}$ f) $f(x)=xe^{x^2}$ sur $I=\mathbb{R}$ g) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ sur $I=\mathbb{R}$

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \mapsto F(x)+C$ est une primitive de f sur I.

Démonstration :

Exemple :
Trouver trois primitives de f(x) = 2x+3

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Demonstration : - Admis -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Exercice : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1.

III. CALCUL D'INTEGRALES

1) Définition

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Démonstration :

La dérivée de la fonction G définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction f.

Donc G est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\ ;\ b]$, on a $G(x)=F(x)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

De plus, $G(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ et $G(a)=F(a)+k$ donc $F(a)=-k$ et donc $k=-F(a)$.

Or $G(b)=\int_a^b f(t)\,dt=F(b)+k=F(b)-F(a)$.

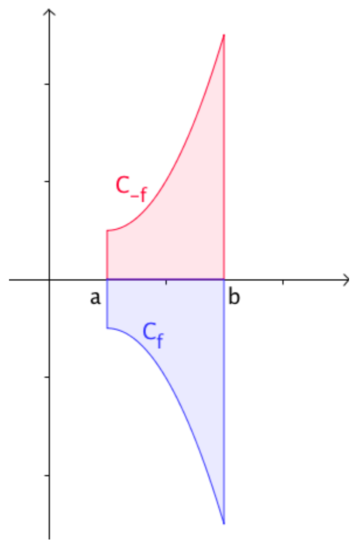
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. On appelle intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$ la différence $F(b)-F(a)$ noté $\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque :
La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a\ ;\ b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$=-\big(G(b)-G(a)\big)$$ où G est une primitive de la fonction $-f$.

$$=-\int_a^b\big(-f(x)\big)\,dx$$



Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$.

Notations : On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx=\big[F(x)\big]_a^b=F(b)-F(a)$

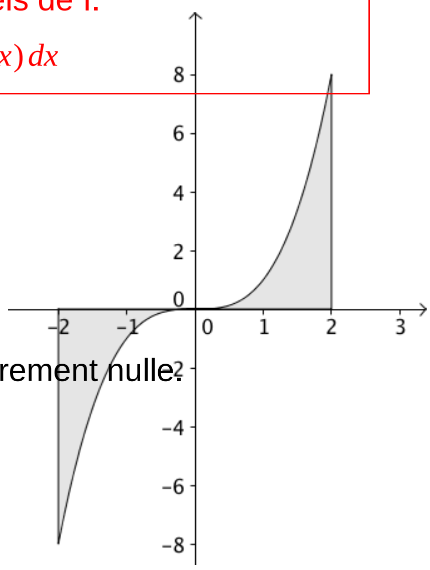
Exercice : Calculer : $A=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx$ $\qquad B=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$ $\qquad C=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+3}\,dx$

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx=0$ $\qquad$ b) $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration :
a)

b)



Remarque : Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple : $\int_{-2}^2 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2=\frac{1}{4}\times 2^4-\frac{1}{4}\times(-2)^4=4-4=0$.

2) Relation de Chasles

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration :

$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ = ...

3) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ b) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf - $F+G$ est une primitive de $f+g$

Exercice : Soit A = ... et B = ...

a) caluler A+B et A-B b) en deduire les valeurs de A et B

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A-B=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x\right)dx-\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos 2x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(2\times 2\pi\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\times 0\right)=0$$

b) On a ainsi :

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \le b$

a) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\ge 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

b) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\ge g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :

a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.

b) Si $f(x)\ge g(x)$ alors $f(x)-g(x)\ge 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx \ge 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Exercice

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

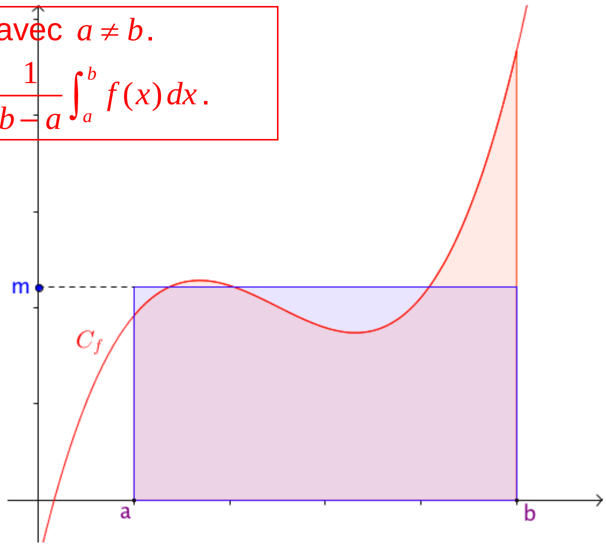
a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est ....et positive sur .... on a...........
b) On déduit de la question précédente que...

D'où ......

IV. VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a \neq b$.

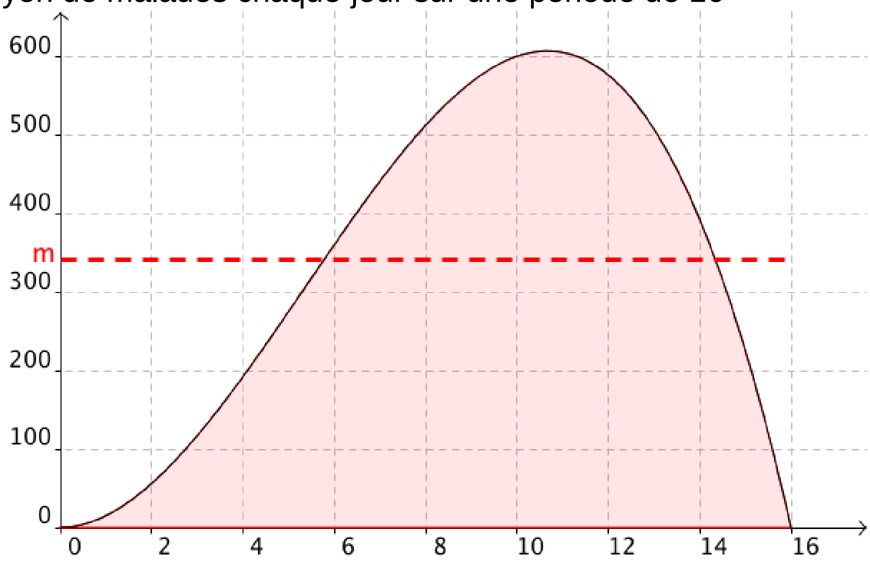
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.



Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f
est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).

Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f
définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

Exercice :On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$. Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.



Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.