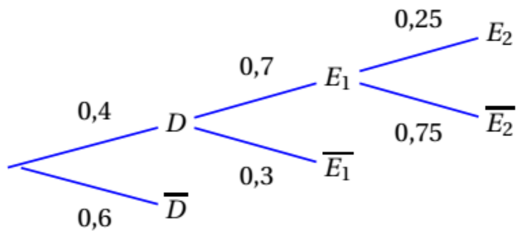
NOM
Prenom

Correction DM : Probabilités discretes et continues

EXERCICE 1

1. **a.**



b. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

c. Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$.
D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.
On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.
D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. **a.** Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathcal{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

   b. On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.
La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.
La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln)
$\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.
Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

NOM

Prenom

EXERCICE 2

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo ou en bus.

Partie A : En utilisant le bus

On suppose dans cette partie que Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_B qui suit la loi uniforme sur $[12\,;\,15]$.

1. On sait que si une variable aléatoire T suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors pour α et β tels que $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, on a $P(\alpha \leqslant T \leqslant \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$.
   Comme T_B suit une loi uniforme sur $[12\,;\,15]$, $P(12 \leqslant T_B \leqslant 14) = \dfrac{14-12}{15-12} = \dfrac{2}{3}$.
2. La durée moyenne du trajet est donnée par l'espérance mathématique de la variable aléatoire.
   On sait que si une variable aléatoire T suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors $E(T) = \dfrac{a+b}{2}$; donc la durée moyenne du trajet est $E(T_B) = \dfrac{12+15}{2} = 13{,}5$ minutes.

Partie B : En utilisant son vélo

On suppose à présent que Sofia choisit d'utiliser son vélo.
La durée du parcours (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_V qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}5$.

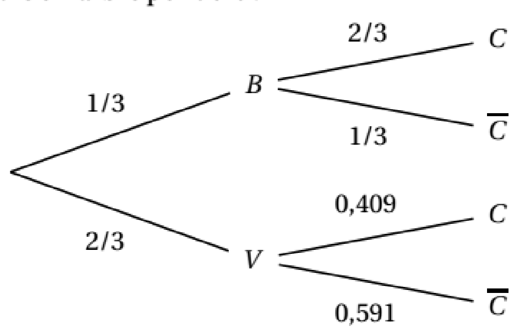
1. Si une variable aléatoire T suit une loi normale de paramètres μ et σ, alors $P(T < \mu) = 0{,}5$.
   Comme T_V suit la loi normale de paramètres $\mu = 14$ et $\sigma = 1{,}5$, alors $P(T_V < 14) = 0{,}5$.
2. La probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma est
   $P(12 \leqslant T_V \leqslant 13) \approx 0{,}409$ (trouvé à la calculatrice).

Partie C : En jouant aux dés

Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.
Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :

— B l'évènement « Sofia prend le bus » ;
— V l'évènement « Sofia prend son vélo » ;
— C l'évènement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Sofia prend le bus quand elle obtient 1 ou 2 en lançant le dé, donc avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$.
   On résume les données dans un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales : $P(C) = P(B \cap C) + P(V \cap C) \approx \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0{,}409 \approx 0{,}49$.

2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'elle ait emprunté le bus est $P_C(B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} \approx \dfrac{\frac{2}{9}}{0{,}49} \approx 0{,}45$.

NOM
Prenom
EXERCICE 3

Question préliminaire
Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, oà[1] λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t$.
La fonction $x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ a pour primitive sur **R** la fonction $-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc
$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-\lambda a} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
L'événement $(T > a)$ est l'événement contraire de $(T \leqslant a)$ donc $P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right] = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2800}$.

Partie A : étude d'un exemple

1. La probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours est $P(T \geqslant 180) = \mathrm{e}^{-\frac{180}{2800}} \approx 0{,}938$.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours est $P_{(T \geqslant 180)}(T \geqslant 180 + 180)$.
   Comme la loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement :
   $$P_{(T \geqslant 180)}(T \geqslant 180 + 180) = P(T \geqslant 180) \approx 0{,}938.$$