NOM Prenom

DS : Probabilités discretes et continues(+complexes)

<u>Remarque :</u> dernier exercice sur 4 seulement....

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) X, une variable aléatoire, suit la loi normale centrée réduite. On appelle Φ la fonction de répartion. On a alors : $\Phi(x) = P(X \leqslant x)$. On donne les résultats suivants pour tous réels a et b tels que a<b :

- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leqslant -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$

Soit α un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

2) **Application :** Une embouteilleuse remplit des bouteilles de 100 cl de jus de pommes. On note T l'écart $q - 100$ en cl, où q désigne la quantité de jus de pomme dans la bouteille.
   a) Déterminer au centième près, le nombre $u > 0$ tel que : $P(-u \leqslant T \leqslant u) = 0,9$.
   b) En déduire un encadrement, centré sur 100 cl, de la quantité de jus de pomme dans 90 % des bouteilles.

Exercice 2

Pannes informatiques **(6 points)**

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1) On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0, 6.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0, 131.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .

2) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0, 52.
3) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5) On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a) Quelle est la loi suivie par Y ?
   b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice 3

Conception des tests de QI **(3 points)**

Note : on reviendra pour les questions posées dans cette exercice à la loi normale centrée réduite en faisant un changement de variable judicieusement choisi.

Les tests de QI (quotient intellectuel) sont conçu de façon à ce que, pour une population donnée, le QI moyen soit 100 et l'écart-type 15. Les résultats au QI sont distribués suivant une loi normale.

1) Quel est le pourcentage de la population ayant un QI en dessous de 70 ?
2) Quel est le pourcentage de la population ayant un QI entre 100 et 115 ?
3) Une association regroupe les personnes volontaires et dont le QI fait partie des 2 % les plus élevés.
   Quel QI faut-il avoir pour adhérer à cette association ?

Exercice 4

Composants éléctroniques **(4 points)**

Un usine fabrique des composants électroniques. On estime à 0,02 la probabilité qu'un composant pris au hasard dans la production soit défectueux.
En bout de chaîne, on teste 400 composants choisis au hasard avec remise. On appelle X la variable aléatoire associé au nombre de composants défectueux.

1) Quelle loi suit X ? Pourquoi ?
2) À l'aide de cette loi et de votre calculatrice, calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir au moins 10 composants défectueux dans l'échantillon.
3) On fait l'approximation que X suit une loi normale.
   a) Pourquoi peut-on faire cette approximation ?
   b) Quels sont les paramètres de cette loi normale ?
   c) Avec votre calculatrice, calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir au moins 10 composants défectueux dans l'échantillon avec cette approximation.
   d) Quelle est alors l'erreur ϵ, en pourcentage, commise à 1 % près ?

Exercice 5

Triangle **(6 points)**

On donne les points A$(2+i)$, B$(6+3i)$ et C$(-1+7i)$.

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sur l'annexe.

2) a) Déterminer la forme algébrique du complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

   b) En déduire que le triangle ABC est rectangle.

3) a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que : $|z-2-i| = |z-6-3i|$.
   Représenter (Δ) sur l'annexe.

   b) On donne le point E$\left(\dfrac{5}{2}+5i\right)$. Montrer que le point E est le milieu de [BC].

4) a) Calculer la longueur EB.

   b) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M d'affixe z tel que : $|z - z_E| = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.
   Représenter $(\mathscr{C})$ sur l'annexe.

   c) Pourquoi les points A, B et C appartiennent à $(\mathscr{C})$?

NOM Prenom

EXERCICE 2 ***(7 points)***

Pannes informatiques **(6 points)**

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $P(\mathrm{X} \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1) On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est $0,131$.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .

2) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $0,52$.
3) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5) On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a) Quelle est la loi suivie par Y ?
   b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

EXERCICE 3 ***(4 points)***

NOM Prenom

Un usine fabrique des composants électroniques. On estime à 0,02 la probabilité qu'un composant pris au hasard dans la production soit défectueux.
En bout de chaîne, on teste 400 composants choisis au hasard avec remise. On appelle X la variable aléatoire associé au nombre de composants défectueux.

1) Quelle loi suit X ? Pourquoi ?
2) À l'aide de cette loi et de votre calculatrice, calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir au moins 10 composants défectueux dans l'échantillon.
3) On fait l'approximation que X suit une loi normale.
   a) Pourquoi peut-on faire cette approximation ?
   b) Quels sont les paramètres de cette loi normale ?
   c) Avec votre calculatrice, calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir au moins 10 composants défectueux dans l'échantillon avec cette approximation.
   d) Quelle est alors l'erreur ϵ, en pourcentage, commise à 1 % près ?