CH.... : LOIS NORMALES

Le célèbre mathématicien allemand, *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855) conçoit une loi statistique continue, appelée loi normale dont la répartition est représentée par la fameuse courbe en cloche. L'adjectif « normale » s'explique par le fait que cette loi décrit et modélise des situations statistiques aléatoires concrètes et naturelles.
Prenons par exemple une population de 1000 personnes dont la taille moyenne est de 170 cm. En traçant l'histogramme des tailles, on obtient une courbe en cloche dont la population se concentre essentiellement autour de la moyenne.

I. RAPPELS

Définition : Soit Y une variable aléatoire continue de densité fy , soit X une variable aléatoire réelle finie sur (Ω) un univers. X ayant pour loi

Valeurs de X	x_1	x_2	x_3	...	x_m
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_m

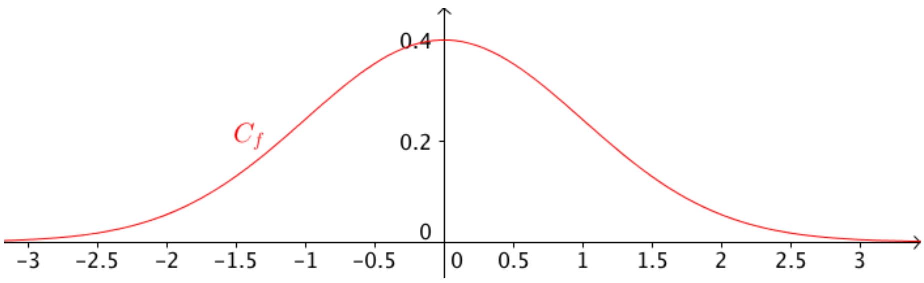
On appelle

espérance	E(X)=	E(Y)=
variance	V(X) =	V(Y) =
écart type	σ(X)=	σ(Y)=

II. LOI NORMALE CENTREE REDUITE

1) Définition et propriétés

Définition :
La loi normale centrée réduite, notée $N(0;1)$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.



La représentation graphique de la fonction densité de la loi $N(0;1)$ est appelée *courbe en cloche*.
Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Contextes d'utilisation :
Taille d'un individu, fréquence cardiaque, quotient intellectuel, …

Remarque :
Il n'est pas possible de déterminer une forme explicite de primitives de la fonction densité de la loi normale centrée réduite.

2) Calcul de probabiltés

Pour calculer des probabilités, on introduit une fontion auxilaire.

Définition : Soit Z une variable aléatoire de loi $N(0;1)$,
On définit aussi la fonction de répartition de Z : $F_Z : \mathbb{R} \to [0;1]$
$x \to F_Z(x) = P(Z \leq x)$

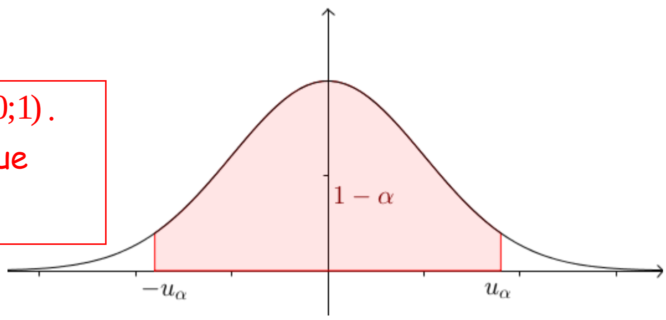
Autrement dit : ....

Théorème : Soit Z une variable aléatoire de loi $N(0;1)$,
1. Pour tout a et b avec $a \leq b$, on a $P(a \leq Z \leq b) = F_Z(b) - F_Z(a)$
2. Pour tout réel x, $F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)$

Démonstration :

Exemple :

3) Intervalle centré en 0 de probabilité donnée



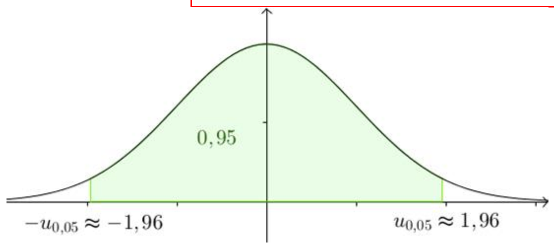
Propriété : X est une variable aléatoire de loi normale $N(0;1)$.
Pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que
$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

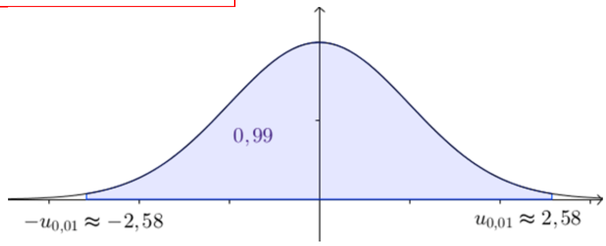
Démonstration (exigible BAC) :
Par symétrie de la courbe de la fonction densité *f*, on a :
$P(-t \leq X \leq t) = 2P(0 \leq X \leq t) = 2\int_0^t f(x)dx = 2F(t)$ où *F* est la primitive de *f* qui s'annule en 0.
La fonction *F* est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, il en est de même pour la fonction $2F$.
L'aire totale sous la courbe est égale à 1, donc par symétrie, on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}$.
Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} 2F(t) = 1$.
On dresse le tableau de variations :

t	$+\infty$
$2F(t)$	$\nearrow$ 1

Si $\alpha \in]0;1[$ alors $1-\alpha \in]0;1[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires,
il existe au moins un réel u_α de $[0;+\infty[$ tel que $2F(t)=1-\alpha$.
Comme $2F$ est strictement croissante, on en déduit que u_α est unique.
-- CQFD--

Cas particulier : $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$





4) Espérance mathématique

Propriété : X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.
Alors E(X)=0 V(X) =1 $\sigma(X)$=1

Pour cette raison, la loi $N(0;1)$ est appelée la loi normale centrée réduite

Démonstration :

On admet que : $E(X) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t\, f(t)dt + \lim_{y \to +\infty} \int_0^y t\, f(t)dt$

On a : $\int_x^0 t\, f(t)dt = \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_x^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right)$$

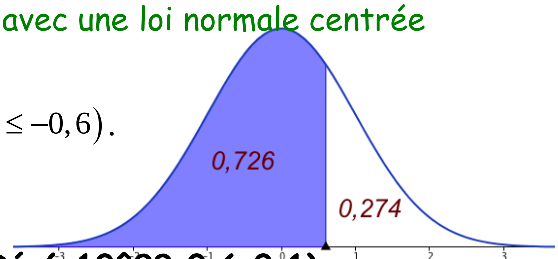
Donc $\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t\, f(t)dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On prouve de même que $\lim_{y \to +\infty} \int_0^y t\, f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et donc $E(X)=0$.

2-V(X)= $\sigma(X)$ = 1 et est admis
-CQFD—

Méthode : Utiliser une calculatrice pour calculer une probabilité avec une loi normale centrée réduite

a) Calculer $P(X \le 0,6)$ b) En déduire $P(X \ge 0,6)$ et $P(X \le -0,6)$.



a) Avec une TI-83 Plus :
Taper sur les touches "**2nde**" > "**VAR/Distrib**" puis saisir **normalFRéq(-10^99,0.6,0,1)**
Avec une TI-84 Plus :
Taper sur les touches "**2ND**" > "**VARS/Distrib**" puis saisir **normalcdf(-10^99,0.6,0,1)**

Avec une Casio Graph 35+ :
Taper sur la touche "**OPTN**">"**STAT**">"**DIST**">"**NORM**"> "**Ncd**" puis saisir **NormCD(-10^99,0.6,1,0)**

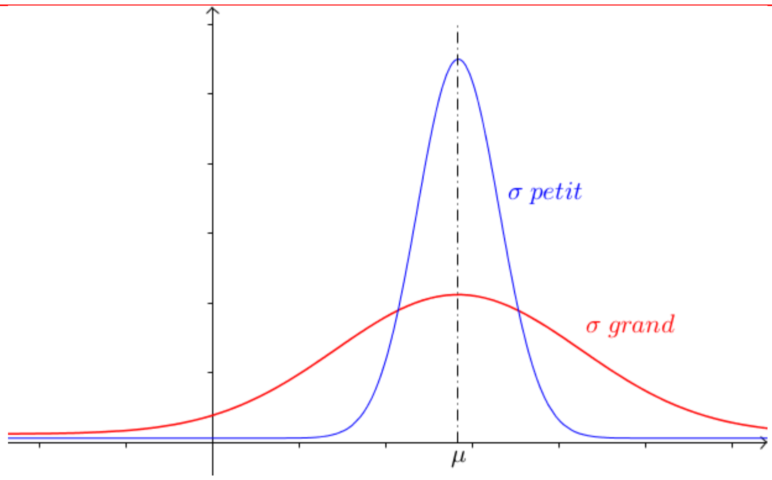
On a ainsi : $P(X \leq 0,6)$ = ...

b) $P(X \geq 0,6)$ =....................
$P(X \leq -0,6)$=...............................

III. LOI NORMALE GENERALE

1) Définition

Définition : Soit un nombre réel μ et un nombre réel strictement positif σ.
Dire qu'une variable aléatoire continue *X* suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N(\mu;\sigma^2)$, signifie que la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.



Remarques : Vidéo https://youtu.be/ZCicmYQsl2Q
- La courbe représentative de la fonction densité de la loi $N(\mu;\sigma^2)$ est une *courbe en cloche* symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.
- La courbe est d'autant plus "resserrée" autour de son axe de symétrie que l'écart-type σ est petit. L'écart-type (ou la variance) est un caractère de dispersion autour de l'espérance qui est un caractère de position.

Méthode : Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour calculer une probabilité avec une loi normale

Une compagnie de transport possède un parc de 200 cars. On appelle *X* la variable aléatoire qui a un car choisi au hasard associe la distance journalière parcourue. On suppose que *X* suit la loi normale $N(80;14^2)$.
a) Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour ?
b) Déterminer le réel t tel que $P(X \leq t)=0,9$. Interpréter.

a) Avec une TI-83 Plus :
Taper sur les touches "**2^nde**" > "**VAR/Distrib**" puis saisir **normalFRéq(70,100,80,14)**

Avec une TI-84 Plus :
Taper sur les touches "2ND" > "**VARS/Distrib**" puis saisir **normalcdf(70,100,80,14)**
Avec une Casio Graph 35+ :
Taper sur la touche "**OPTN**" > "**STAT**"> "**DIST**"> "**NORM**" > "**Ncd**" puis saisir **NormCD(70,100,14,80)**

On a ainsi : P(70≤X≤100) = ...
La probabilité qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour est d'environ ....%.

b) Avec une TI-83 Plus :
Taper sur les touches "2nde" > "**VAR/Distrib**" puis saisir **FracNormale(0.9,80,14)**
Avec une TI-84 Plus :
Taper sur les touches "2ND" > "**VARS/Distrib**" puis saisir **invNorm(0.9,80,14)**
Avec une Casio Graph 35+ :
Taper sur la touche "**OPTN**" > "**STAT**"> "**DIST**"> "**NORM**" >"**InvN**" puis saisir **InvNormCD(0.9,14,80)**

On trouve t≅........... . Ainsi, ...% des cars parcourent moins de .... km par jour.

Méthode : Déterminer une espérance ou un écart-type

a) X est une variable aléatoire de loi normale $N\left(3;\sigma^2\right)$. Déterminer s tel que $P(X<2)=0,4$.
b) X est une variable aléatoire de loi normale $N\left(\mu;10^2\right)$.Déterminer m tel que $P(X<30)=0,7$.

a)

⇔soit $\sigma \approx 3,95$.

b)

⇔ $\mu \approx 24,8$.

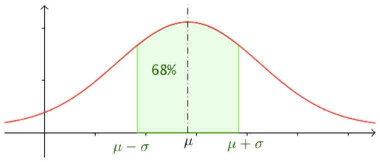
Propriété : Soit X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
.Alors E(X)=μ V(X) =σ^2 $\sigma(X)$ = σ

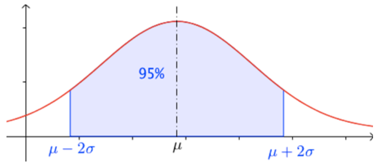
Démonstration :

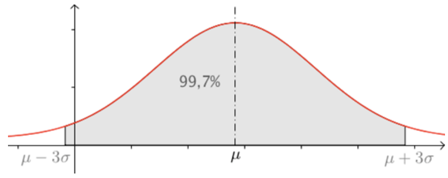
2) Intervalles à "1, 2 ou 3 sigmas"

Propriétés : Soit X de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

a) $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 0,683$ b) $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 0,954$ c) $P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 0,997$







Démonstration dans le cas 1 sigma :

$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P(-\sigma \le X-\mu \le +\sigma) = P\left(-1 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 1\right) = P(-1 \le Y \le 1)$$

avec Y variable aléatoire de loi normale $N(0;1)$.

On ne connaît pas de formule explicite d'une primitive de la fonction densité de la loi $N(0;1)$.

A l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, on peut cependant obtenir une valeur approchée de la probabilité : $P(-1 \le Y \le 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx 0,683$. – CQFD--

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de la loi normale $N(60;5^2)$.

Déterminer a et b tel que $P(a \le X \le b) = 0,954$

On a P(................................)≅0.954

Alors : a = ... = 50 et b = ...= 70. On a ainsi : $P(50 \le X \le 70) = 0,954$.

IV. THEOREME DE MOIVRE-LAPLACE

1) Loi binomiale

Définition On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p. On note X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves, le nombre de succès. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On note $\mathcal{B}(n,p)$.

Propriété : Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Définition/Propriété: Si X est une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors :

- L'**espérance** de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$
- La **variance de** la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1-p)$
- **L'écart type** de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est σ=$\sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration :

-- CQFD --

2) Theoreme de moivre-laplace

Théorème : n est un entier naturel non nul et $p \in]0;1[$.

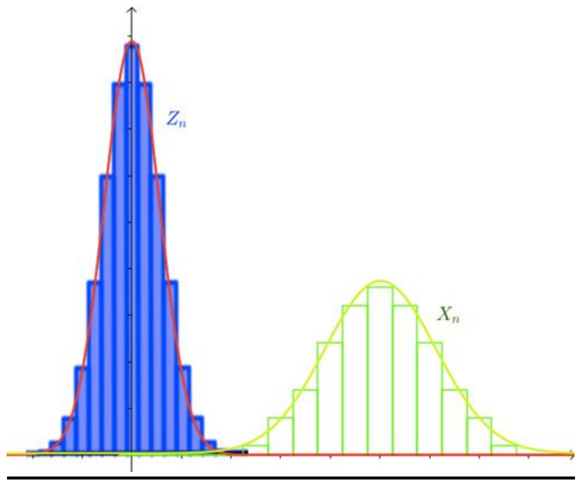
Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$.

Soit $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ la variable centrée réduite associée à X_n.

Alors pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a : $\lim_{n \to +\infty} P(a \le Z_n \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Démonstration : - Admis -

Autrement dit : pour n tres grand,
un loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est tres proche d'une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$



Remarque :
Ce théorème traduit le fait que la probabilité d'un événement associé à une loi binomiale peut être approchée pas une probabilité d'un événement associé à la loi normale centrée réduite.

Remarque : en pratique on appliquera le théorème quand n≥30 np≥5 n(1-p)≥5

Méthode : Appliquer le théorème de Moivre-Laplace

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n=1000 et p=0,3.
Calculer $P(X \le 320)$.

On a :
n≥30 np=.........≥5 n(1-p)..............≥5.
On peut donc appliquer le théorème de Moivre-Laplace
E(X) = ...= 300 σ(X) =...≅ 14.5
D'après le théorème de Moivre-Laplace, la loi de $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \approx \frac{X - 300}{14,5}$ peut être approchée par une loi normale centrée réduite.
Ainsi, à l'aide de la calculatrice, on : P(X≤320)=...................................... ≅...........................≅0.916