NOM
Prenom

DM : Nombre Complexes et Integration

EXERCICE 1 ***(5 points)***

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6},\ z_2 = 2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
   On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z^{2\,007}$.

EXERCICE 2 ***(5 points)***

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

   (a) Calculer $P(-1)$.

   (b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

   $$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

   $$z_A = -1,\ z_B = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_G = 3.$$

   (a) Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

   (b) Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

   (c) Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC.

NOM
Prenom

EXERCICE 3 ***(5 points)***

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right) \mathrm{d}x$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f\ : x \longmapsto f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

   (b) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

   (a) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \dfrac{4}{e}$.

   (b) Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

   (c) Démontrer que $J + K = 4I$.

   (d) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

EXERCICE 4 ***(5 points)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^3 f(t)\,dt\ ;\quad J = \int_{-5}^{-2} f(t)\,dt\ ;\quad K = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

   Pour une seule de ces intégrales on peut affirmer qu'elle est positive, et pour une seule on peut affirmer qu'elle est négative.

   Préciser ces deux intégrales et justifier ce choix.

2. A l'aide des informations contenues dans le tableau de variation de f, donner un encadrement par des nombres entiers des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 f(t)\,dt\ ;\quad B = \int_1^2 f(t)\,dt$$

3. On définit, pout tout réel x, la fonction F par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

   a. Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a \leqslant F(2) \leqslant b$.

   b. Etudier la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.

   c. Etudier le sens de variation de la fonction F.