Correction DM Nombre Complexes et Integration

EXERCICE 1

1. On a $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$.

2. – $|z_1|^2 = 2+6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

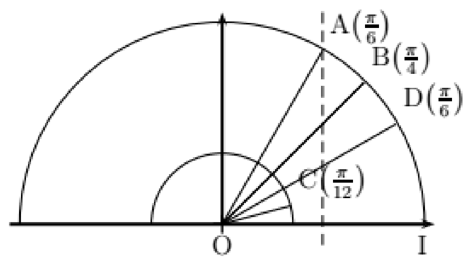
   – On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

   – Il suit $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$. et $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$.

3. On en déduit que $Z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et par identification avec la forme algébrique du 1) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

4. On place facilement le point B(2 ; 2) :
   Le point A d'affixe z_1 est obtenu en construisant la médiatrice du segment [OI].
   Le point D est obtenu en construisant la bissectrice de $\widehat{\text{IOA}}$.
   Le point C avec la bissectrice de $\widehat{\text{IOD}}$ et le cercle de centre O et de rayon 1.



5. Le module : $|Z^{2007}| = |Z|^{2007} = 1^{2007} = 1$.
   L'argument : $\arg(Z^{2007}) = 2007 \times \frac{\pi}{12} = \frac{669\pi}{4} = \frac{672\pi - 3\pi}{4} = 168\pi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
   On a donc $Z^{2007} = e^{-\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 2

1. (a) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$

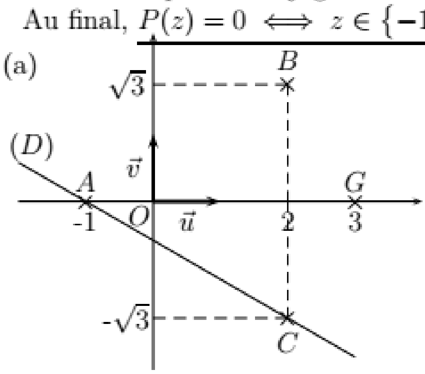
   (b) $(z+1)(z^2+az+b) = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b$ donc,

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2+az+b) \iff \begin{cases} a+1 = -3 \\ a+b = 3 \\ b = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases},$$

   d'où, $\underline{P(z) = (z+1)(z^2-4z+7)}$.

   (c) Le trinôme $z^2 - 4z + 7$ a pour discriminant : $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$, et admet donc deux racines complexes conjuguées.
   Au final, $\underline{P(z) = 0 \iff z \in \left\{-1; 2-i\sqrt{3}; 2+i\sqrt{3}\right\}}$.

2. (a)



   (b) $AB = |z_B - z_A| = |(2+i\sqrt{3}) - (-1)| = 2\sqrt{3}$
   $BC = |z_C - z_B| = (2-i\sqrt{3}) - (2+i\sqrt{3})| = 2\sqrt{3}$
   $AC = |z_C - z_A| = (2-i\sqrt{3}) - (-1)| = 2\sqrt{3}$
   On en déduit que <u>le triangle ABC est équilatéral</u>.

   (c)
$$\begin{aligned} Z &= \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-1-(2-i\sqrt{3})}{3-(2-i\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{4}\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}(4i\sqrt{3}) = i\sqrt{3} \end{aligned}$$

On a donc $Z \in i\mathbb{R}$, donc $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$. Comme de plus, $\arg(Z) = (\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA})$, on en déduit que le triangle GAC est rectangle en C.

EXERCICE 3 ***(5 points)***

1. (a) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$, dont le dénominateur $2-x$ ne s'annule pas sur $[0;1]$. f est donc dérivable sur $[0;1]$, avec :
$f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(2-x)+e^{-x}}{(2-x)^2} = \dfrac{e^{-x}(1-2+x)}{(2-x)^2} = \dfrac{e^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$.
Pour $x \in [0;1]$, on $e^{-x} > 0$, $(2-x)^2 > 0$ et $x-1 \leqslant 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$: la fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ de $f(0) = \dfrac{1}{2}$ à $f(1) = e^{-1} \approx 0,368$.

   (b) On a vu que sur $[0\ ;\ 1]$, $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. (a) Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 2+x \\ v'(x) & = & e^{-x} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & -e^{-x} \end{array}\right.$
Toutes les fonctions étant continues, on peut intégrer par parties :
$$J = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-(x+2)e^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 = \left[-(x+3)e^{-x}\right]_0^1 = -4e^{-1}+3 = 3-\frac{4}{e}$$

   (b) En partant de l'encadrement trouvé au 1. b. :
$\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{x^2}{e} \leqslant x^2 f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2$, en multipliant par $x^2 \geqslant 0$, d'où en intégrant sur $[0\,;\,1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{e}\,dx \leqslant K \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx \iff \left[\frac{x^3}{3e}\right]_0^1 \leqslant K \leqslant \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \iff \frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.

   (c) $$\begin{aligned} J+K &= \int_0^1 (2+x)e^{-x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2e^{-x}}{2-x}\,dx = \int_0^1 \left[(2+x)e^{-x} + \frac{x^2e^{-x}}{2-x}\right]\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{(2-x)(2+x)e^{-x}+x^2e^{-x}}{2-x}\,dx = \int_0^1 4\frac{e^{-x}}{2-x}\,dx = 4I. \end{aligned}$$

   (d) $J = 3-\dfrac{4}{e} \Rightarrow \dfrac{1}{3e}+3-\dfrac{4}{e} \leqslant J+K \leqslant \dfrac{1}{6}+3-\dfrac{4}{e} \Rightarrow \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3e}+3-\dfrac{4}{e}\right)) \leqslant I \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{6}+3-\dfrac{4}{e}\right)$
Soit donc, $\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{12e} \leqslant I \leqslant \dfrac{19}{24}-\dfrac{1}{e}$.
Comme $\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{12e} > 0,412$ et $\dfrac{19}{24}-\dfrac{1}{e} < 0,424$, on en déduit que $0,412 < I < 0,424$, soit $I \approx 0,42$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 4

1. Comme la fonction f est positive sur $[0;3]$, on a : $I = \int_0 f(t)\,dt \geqslant 0$.

   Comme la fonction f est négative sur l'intervalle $[-5;-2]$, on a : $J = \int_{-5}^{-2} f(t)\,dt \leqslant 0$.

2. Pour tout réel $t \in [0;1]$, on a : $0 \leqslant f(t) \leqslant 2$.
   En intégrant pour t allant de 0 à 5, on obtient, car l'intégrale conserve l'ordre,

$$\int_0^1 0\,dt \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 2\,dt \iff 0 \leqslant A \leqslant 2$$

   De même, sur l'intervalle $[1;2]$, $1 \leqslant f \leqslant 2$, et donc,

$$\int_1^2 1\,dt \leqslant \int_1^2 f(t)\,dt \leqslant \int_1^2 2\,dt \iff 1 \leqslant B \leqslant 2$$

3. a. D'après la relation de Chasles : $F(2) = A+B$, d'où $0+1 \leqslant F(2) \leqslant 2+2 \iff 0 \leqslant F(2) \leqslant 4$.

   b. Pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $f(t) \geqslant 1$.
   Ainsi, si $x \in [1;+\infty[$, alors $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \geqslant \int_1^x 1\,dt = x - 1$.
   Or, $\lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$, et donc, par comparaison (théorème des gendarmes), on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   c. F est la primitive de f qui s'nnule en 1, et ainsi, $F' = f$.
   Comme f est négative sur $\mathbb{R}_-$, F est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et comme f est positive sur $\mathbb{R}_+$, F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.